Differensiallikninger
definisjoner, eksempler og litt om løsning

Forelesning uke 42, 2007

MAT-INF1100

Differensiallikninger i MAT-INF1100

- Definsjon, litt om generelle egenskaper
- Noen få anvendte eksempler
- Teknikker for løsning i formel
  3-4 spesielle tilfeller
- Numeriske teknikker
  Kan nesten alltid benyttes
- Viktig for eksempler i INF1100
  Fordel å gjennomgå numeriske teknikker tidlig
- Differensiallikninger er svært viktig for FAM, MIT og andre programmer

Mesteparten av stoffet er hentet fra *Kalkulus*, noe fra *Kompendium*

Planlagt rekkefølge, uke 42

1. Hva er en differensiallikning ?
2. Noen eksempler på differensiallikninger fra kjemi og fysikk
3. Løsning av lineær førsteordenslikning *Kalkulus, kap. 10.1*
   Hvis tid regnes noen eksempler
4. Initialbetingelse og entydighet *(K. 10.3.1)*
5. Numerisk løsning av likninger av første orden *Kalkulus, kap. 10.8* og *Kompendium, kap. 8.1.1*
6. Omskrivning av andreordenslikning til sett av førsteordensliknger. Numerisk løsning av sett av førsteordensliknger *Kompendium, kap. 8.1.2*
7. Neste uke: Mer teori og løsning i formel

Henvisninger til feks. sats 10.3.2 i *Kalkulus* skrives *K. 10.3.2*.

NYTT TEMA

Om likninger

Eksempler på likninger

Algebraisk likning

En algebraisk likning har ett (eller flere) tall som ukjente.
Eksempel:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Løsningene $x = -2$ og $x = 3$ er de verdiene for x som oppfyller relasjonen.

Differenslikning

En differenslikning har følger som ukjente.
Eksempel

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad n \geq 0$$

har alle $\{x_n\}$ $(n \geq 0)$ som løsninger der $x_n = A2^n + B3^n$ (A og B er konstanter).
Viktig: $\{x_n\}$ oppfyller likning for alle $n \geq 0$.

Hva er en differensialikning?

En differensiallikning er en relasjon mellom en funksjon og dens deriverte. Funksjonen er den ukjente.

Eksempel 1

$$y' + y = 0 \qquad \text{for} \qquad x \in \mathbb{R}$$

En løsning $y(x)$ oppfyller denne relasjonen for alle reelle x.
Deriverte tom. orden 1 i relasjon $\Rightarrow$ førsteordenslikning

Eksempel 2

$$y'' + y' + \sqrt{x}y = 0 \qquad \text{for} \qquad x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$$

Deriverte tom. orden 2 i relasjon $\Rightarrow$ andreordenslikning

Testing av ved innsetting, $y' + y = 0,\ x \in \mathbb{R}$

Er $y(x) = x$ en løsning ? $y'(x) = 1$

$$\begin{aligned} y' &\ + \ y &= 0 \\ 1 &\ + \ x &= 0 \end{aligned}$$

Oppfylt bare for $x = -1 \Rightarrow y(x) = x$ er ikke løsning

Er $y(x) = e^{-x}$ en løsning ? $y'(x) = -e^{-x}$

$$\begin{array}{ccccc} y' & + & y & = 0 \\ -e^{-x} & + & e^{-x} & = 0 \\ & 0 & & = 0 \end{array}$$

Relasjon oppfylt for alle $x \Rightarrow y(x) = e^{-x}$ er en løsning
NB: det finnes flere

NYTT TEMA

Anvendelser av differensiallikninger.
Eksempler fra kjemi og fysikk

Hvorfor studere differensiallikninger ?

Differensiallikninger er helt sentrale for fysiske fag og ingeniørfag. Viktig allerede i FYS-MEK 1110

Klasse av eksempler

Hvordan en tilstand endrer seg i tiden avhenger av tilstanden selv. Kan tilstanden beskrives ved en funksjon av tiden, $y(t)$, kan endringen beskrives ved $y'(t)$ siden dette er endringsraten av y mhp. t. Resultatet er en relasjon mellom $y(t)$ og $y'(t)$.

Navn på variabler: bruk av y for ukjent funksjon og t eller x for argument er tilfeldig. I anvendte eksempler velges ofte beskrivende navn.

Eksempel A: nedbrytning av radioaktivt stoff

Vi har en masse $M(t)$ av et radiokativt stoff. Hvert atom har en viss sannsynlighet for å forvandles (emmitere α eller β partikler) i et gitt tidsrom. Endringsraten av massen er da proposjonal med massen selv. Dersom vi starter med masse M_0 har vi det matematisk problemet

$$M' = -kM, \quad M(0) = M_0$$

En differensiallikning for M i t og en initialbetingelse, eller startbetingelse, ved $t = 0$.
Konstanten k beskriver hvor ustabilt stoffet er.
Kalkulus, eksempel 10.2.3.

Klassifisering:

$$M' = -kM \qquad \text{eller} \qquad M' + kM = 0$$

- Første orden
- Lineær
- Konstante koeffisienter
- Homogen: alle ledd inneholder M (litt løst)

Likninger av denne typen skal vi snart løse.

Eksempel B: Kjemisk reaksjon

Oksydasjon av nitrogenmonoksyd (NO) til nitrogendioksyd (NO_2)
"Reaksjonslikning" (viser omsetning i prosess)

$$2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$$

To NO molekyler reagerer med ett O_2 til NO_2.

Vi antar at alt foregår i et lukket volum, V, med god omrøring.
Konsentrasjoner: $C_{NO}(t)$, $C_{O_2}(t)$, $C_{NO_2}(t)$. (molekyler per volum)
Reaksjonsrate er proposjonal med $C_{NO}^2 C_{O_2}$ ($\sim$sannsynlighet for "sammenstøt" av 2 NO og ett O_2 molekyl).

$$\frac{\mathrm{d} C_{NO}}{\mathrm{d} t} = -k C_{NO}^2 C_{O_2},$$

der k er en konstant.
Det inngår ennå to ukjente.

Bevaring av masse (V er totalt volum)

Startkonsentrasjoner: $C_{NO}(0) = a$, $C_{O_2}(0) = b$

$$\begin{aligned} \text{Forbruk av } NO &= 2\times(\text{Forbruk av } O_2) \\ V(a - C_{NO}) &= 2V(b - C_{O_2}) \end{aligned}$$

som gir $C_{O_2} = B + \frac{1}{2}C_{NO}$ der $B = b - \frac{1}{2}a$.

Insatt i reaksjonslikning fra forrige lysark:

$$\frac{\mathrm{d}C_{NO}}{\mathrm{d}t} = -kC_{NO}^2(B + \frac{1}{2}C_{NO}), \quad C_{NO}(0) = a$$

Klassifisering: Første orden, ikkelineær, separabel (forklart senere)

Denne kan vi også "regne på" (er litt "slitsom").

Eksempel C: Bevegelse av partikkel

Newton's 2 lov, rettlinjet bevegelse

$$ma = F,$$

der m = masse, a = akselerasjon og F = kraft.

Posisjon gis som $y(t)$
Fart er endringsrate av posisjon $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$
Akselerasjon er endringsrate av fart $a \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$.
Hvis kraft kan uttrykkes ved posisjon, fart og tid: $F = F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, t)$

Newton's 2 lov $\Rightarrow$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, t)$$

Klassifisering: Differensiallikning av orden 2.

Eksempel C: Konkret tilfelle

Fallskjermhopperen fra kompendiet

Legeme i fritt fall (y måles vertikalt nedover)

$$\begin{array}{cccccc} F & = & mg & - & C\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2, \\ & & \text{tyngde} & & \text{luftmotstand}, \end{array}$$

Konstanten C avhenger av legemets størrelse og form.

Innsetting i likning på forrige lysark

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{C}{m}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Klassifisering: Andreordens, ikkelineær
(Kan skrives om til separabel)

NYTT TEMA

Løsning av førsteordens lineær likning i formel

Førsteordenslikninger

Generell førsteordenslikning

$$y' = F(x, y),$$

der F er et gitt uttrykk av to variable (x og y).

I to tilfeller skal vi løse likningen i formel. Ett av dem

Lineær førsteordenslikning

$$y' + f(x)y = g(x).$$

svarer til $F(x, y) = g(x) - f(x)y$.

Ulike strategier kan benyttes. Vi følger den i *Kalkulus* selv om den er "triksete".

Lineær likning av orden 1.

Kalkulus, kap. 10.1

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(IN)}$$

Skal oppfylles i et intervall

Knep: integrerende faktor

En integrerende faktor er en funksjon vi ganger likningen med, slik at vi kan integrere den opp direkte.
Er oftest vanskelig (eller umulig) å finne.

"Opp av hatten" kommer faktoren som virker for (IN)

$$e^{F(x)}$$

der F er en antiderivert til f; dvs. $F' = f$.

Bruk av integrerende faktor

Multipliserer (IN) med faktor $e^{F(x)}$ der $F' = f$

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$$

For andre ledd har vi $e^{F(x)}f(x) = e^{F(x)}F'(x) = (e^{F(x)})' \Rightarrow$

$$e^{F(x)}y' + \left(e^{F(x)}\right)' y = e^{F(x)}g(x)$$

Produktregel, brukt baklengs, gir så

$$\left(e^{F(x)}y\right)' = e^{F(x)}g(x)$$

Nå kan begge sider integreres

Integrasjon gir

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)dx + C$$

Der C er en vilkårlig konstant
Alle løsninger av likningen vår kan da skrives

$$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right)$$

Setning *K. 10.1.3*

Merk: Det kan være umulig å løse integralet i *K. 10.1.3* i formel;
Likevel sier vi at differensiallikningen er løst

Sidebetingelse; entydighet *K. kap.10.3*

Vi har løst

$$y' + f(x)y = g(x), \qquad \text{for} \qquad x \in I$$

Legger til betingelsen $y(c) = d$ der $c \in I$. Er c (venstre) endepunkt i I kalles dette en initialbetingelse.
Nå finnes det bare èn løsning.

Vi viser entydighet og bestemmer løsningen samtidig.

Trinn 1; omskrivning av *K. 10.1.3*

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x)dx + C \right)$$

F er en hvilken som helst antiderivert til f.
Uten tap av generalitet velger vi derfor $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$ og *K. 10.1.3* skrives

$$y = e^{-\int\limits_c^x f(t)dt} \left(\int e^{\int\limits_c^x f(t)dt} g(x)dx + C \right)$$

Uttrykk innenfor høye paranteser inneholder en valgbar C og et valgbart ubestemt integral

Omskrivning av ubestemt integral

$$\int e^{F(x)}g(x)dx = \int_c^x e^{F(t)}g(t)dt + D = \int_c^x e^{\int_c^t f(s)ds} g(t)dt + D,$$

der D er en (valgbar) konstant. (Husk: $F(t) = \int_c^t f(s)ds$)

Slår sammen $D + C = \hat{C}$ til bare en konstant

Entydig form av *K. 10.1.3*

$$y(x) = e^{-\int_c^x f(t)dt}\left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)ds} g(t)dt + \hat{C}\right).$$

Eneste valgfrihet: $\hat{C}$

Trinn 2 Vi bestemmer $\hat{C}$ slik at $y(c) = d$

$$d = y(c) = e^{-\int_c^c f(t)dt} \left(\int_c^c e^{\int_c^t f(s)ds} g(t)dt + \hat{C} \right) = \hat{C}$$

dvs $\hat{C} = d$ og

K. 10.3.1

Løsningen av $y' + f(x)y = g(x)$, $y(c) = d$ er

$$y = e^{-\int_c^x f(t)dt} \left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)ds} g(t)dt + d \right),$$

og er entydig

Eksempel A: løsning

Nedbrytning av radioaktivt stoff

$$M' = -kM, \quad M(0) = M_0$$

Klassifisering: Første orden, lineær, konst. koeff., homogen.
Fri variabel: tid betegnes med x. Svarer til

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(IN)}$$

med $f \equiv k$, $g \equiv 0$ og $y \to M$. Kan bruke *K. 10.3.1*, men starter fra

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + C \right)$$

der $F = \int f(x) dx$.
Her: $F(x) = \int k \, dx = kx$, $g = 0$ og $y(x) = e^{-kx}(0 + C) = Ce^{-kx}$.

Løsning av differensiallikning $M(x) = Ce^{-kx}$
Initialbetingelse gir $M_0 = M(0) = C$, $\Rightarrow$

$$M(x) = M_0 e^{-kx}$$

Halveringstid, $t_{\frac{1}{2}}$, er definert ved $M(T + t_{\frac{1}{2}})/M(T) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{M(T + t_{\frac{1}{2}})}{M(T)} = \frac{M_0 e^{-k(T + t_{\frac{1}{2}})}}{M_0 e^{-kT}} = e^{-kt_{\frac{1}{2}}}$$

Bruk av logaritmen på begge sider

$$t_{\frac{1}{2}} = \log(2)/k$$

Merk: svar uavhengig av T.

Kommentar til løsning av $y' + ky = 0$

Homogen likning av første orden med konstant koeffisient har en eksponentialfunksjon $y = Ce^{-kx}$ som løsning. Dette henger sammen med at eksponentialfunksjonen $e^{\alpha x}$ har α ganger seg selv som derivert. Vi setter $y = Ce^{\alpha x}$ inn i likning

$$0 = y' + ky = C\alpha e^{\alpha x} + kCe^{\alpha x}.$$

Begge ledd har formen: konstant$\cdot e^{\alpha x}$.
For $\alpha = -k$ vil leddene nulle hverandre ut og vi har en løsning.

Siden skal vi se at ekspontialfunksjonen (og *sin* og *cos*) spiller tilsvarende roller også for andre lineære likninger med konstante koeffisienter.