UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 4. desember 2009.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Differensialligningen $y'' - 2y' + 10y = 0$ har den generelle løsningen

- ☐ $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
- ☐ $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$
- ☐ $y(x) = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
- ☐ $y(x) = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
- ☐ $y(x) = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

Oppgave 2. En løsning av differensialligningen $y''' - 8y = 0$ er

- ☐ $y(x) = e^{2x}$
- ☐ $y(x) = \sin 8x$
- ☐ $y(x) = e^{8x}$
- ☐ $y(x) = e^{-2x}$
- ☐ $y(x) = e^{-x}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Vi har gitt differensialligningen $y' - f(x)y = 3x$ for $x > 0$. Hvis $y(x) = x^2$ er en løsning av ligningen, hva er da $f(x)$?

- ☐ $f(x) = x^2$
- ☐ $f(x) = -1/x^2$
- ☐ $f(x) = 1/x^2$
- ☐ $f(x) = -1/x$
- ☐ $f(x) = 1/x$

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y' + xy^2 = x, \quad y(0) = 0,$$

er gitt ved

- ☐ $y(x) = (e^{x^2} - 1)/(e^{x^2} + 1)$
- ☐ $y(x) = x^2$
- ☐ $y(x) = x/(1 + x)$
- ☐ $y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$
- ☐ $y = \sin x$

Oppgave 5. Vi bruker Newtons metode til å finne en tilnærming til den positive løsningen av ligningen $x^2 = 2$, med startverdi $x_0 = 1$. Da er x_2 gitt ved

- ☐ $x_2 = 3/2$
- ☐ $x_2 = 17/12$
- ☐ $x_2 = 35/24$
- ☐ $x_2 = 5/4$
- ☐ $x_2 = 11/8$

Oppgave 6. Et program genererer digital lyd ved å måle lyden 22 050 ganger pr. sekund (i en kanal, altså ikke stereo), og hver måling lagres som et 32 bits flyttall. For hvert minutt med lyd vil dette gi

- ☐ 1 323 000 bytes
- ☐ 5 292 000 bytes
- ☐ 2 646 000 bytes
- ☐ 10 584 000 bytes
- ☐ 3 435 000 bytes

Oppgave 7. Vi bruker halveringsmetoden for å finne et nullpunkt for funksjonen $f(x) = \cos x$ på intervallet $[0, 10]$, der x er angitt i radianer. Da vil den beregnede løsningen konvergere mot

- ☐ $\pi/2$
- ☐ $3\pi/2$
- ☐ $5\pi/2$
- ☐ 0
- ☐ Metoden vil ikke konvergere

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. En norsk tekst kodes med ISO Latin1 og UTF-16 i de to filene fil1 (ISO Latin1) og fil2 (UTF-16). Hvilket av følgende utsagn er da sant?

☐ Norske tegn blir feil i fil1

☐ fil1 inneholder flere bytes enn fil2

☐ fil2 inneholder flere bytes enn fil1

☐ Norske tegn blir feil i fil2

☐ fil1 og fil2 inneholder like mange bytes

Oppgave 9. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Ved numerisk løsning av differensialligninger er Eulers metode vanligvis mer nøyaktig enn Eulers midtpunktmetode

☐ Ved numerisk løsning av differensialligninger er Taylors metode av tredje orden vanligvis mer nøyaktig enn Eulers metode

☐ Ved numerisk løsning av differensialligninger er Eulers metode vanligvis mer nøyaktig enn Taylors metode av andre orden

☐ Ved numerisk integrasjon er trapesregelen vanligvis mer nøyaktig enn Simpsons formel

☐ Ved numerisk integrasjon er midtpunktregelen vanligvis mer nøyaktig enn Simpsons formel

Oppgave 10. Vi bruker uttrykket $\big(f(h)-2f(0)+f(-h)\big)/h^2$ til å beregne tilnærminger til $f''(0)$ (vi regner eksakt, uten avrundingsfeil). Da vil alltid svaret bli riktig hvis $f(x)$ er

☐ en trigonometrisk funksjon

☐ en logaritmisk funksjon

☐ et fjerdegrads polynom

☐ på formen e^{ax} der a er et reelt tall

☐ et tredjegrads polynom

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$3y_{n+2} - 16y_{n+1} + 5y_n = -20, \quad y_0 = 2, \quad y_1 = 7/3 \tag{1}$$

har løsningen

$$y_n = \frac{5 - 3^{-n}}{2}.$$

b) Anta at vi simulerer (løser numerisk) differensligningen (1) ved hjelp av flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen $\{\bar{y}_n\}$ oppføre seg for store verdier av n? Forklar hvorfor.

Oppgave 2. I denne oppgaven vil du få bruk for at entropien til et alfabet $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ der symbolene har sannsynlighet $p_i = p(\alpha_i)$, er gitt ved

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

Alfabetet $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ med sannsynlighetene

$$p(A) = 0.4, \quad p(B) = 0.4, \quad p(C) = 0.2$$

brukes i resten av denne oppgaven.

a) Hva vil normalt være det minimale antall bits som er nødvendig for å kode en tekst på 5 tegn med dette alfabetet og disse sannsynlighetene?

b) En ukjent tekst $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ av lengde 5 har blitt kodet med aritmetisk koding, noe som har gitt koden 1011 (dette er en kortere kode enn det som er vanlig med aritmetisk koding). Hva er den opprinnelige teksten $\boldsymbol{x}$?

Oppgave 3. Vis ved induksjon at

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

for alle heltall $n \geq 1$.

Oppgave 4. I denne oppgaven skal du løse den andreordens differensialligningen

$$x'' + t^2 x' + \frac{1}{x^2 + 1} = t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1 \tag{2}$$

numerisk.

a) Skriv ligningen (2) som et system av to førsteordens differensialligninger.

b) Bruk Eulers metode på systemet i deloppgave (a) med steglengde $h = 0.5$ til å finne en tilnærming til $x(1)$, altså løsningen av (2) for $t = 1$.

Lykke til!