Forelesning MAT-INF1100
29. august 2011

Knut Mørken

Dagens tema

- Pascal's trekant og binomialformelen
- Reelle tall
  - Intervaller
  - Tallverdier, trekantulikheten
  - Rasjonale og irrasjonale tall
  - $\sqrt{2}$ er irrasjonal

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

På samme måte får vi

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

På samme måte får vi

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b)\\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

På samme måte får vi

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

På samme måte får vi

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b)\\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)\\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

På samme måte får vi

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b)\\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)\\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4\\ &= a^4 + (3+1)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (1+3)ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Binomialformelen

Vi vet at

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

På samme måte får vi

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b)\\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)\\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4\\ &= a^4 + (3+1)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (1+3)ab^3 + b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Binomialformelen

Hva blir $(a+b)^n$?

Binomialformelen

Hva blir $(a+b)^n$?

Det er klart at

$$(a+b)^n = a^n + z_1 a^{n-1} b + z_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + z_{n-1}\, ab^{n-1} + b^n,$$

Binomialformelen

Hva blir $(a+b)^n$?

Det er klart at

$$(a+b)^n = a^n + z_1 a^{n-1} b + z_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + z_{n-1}\, ab^{n-1} + b^n,$$

men hva er tallene z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-1}?

Pascal's trekant

$$1$$

Pascal's trekant

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Pascal's trekant

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Pascal's trekant

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Pascal's trekant

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Pascal's trekant

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Pascal's trekant

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Pascal's trekant

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Binomialformelen

$$1$$

Binomialformelen

$$1$$

$$1 \qquad 1$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
1 & & 2 & & 1
\end{array}
$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)
\end{aligned}
$$

Binomialformelen

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3
\end{aligned}
$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\
&= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

Binomialformelen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\ &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ &= a^4+(3+1)a^3b+(3+3)a^2b^2+(1+3)ab^3+b^4\end{aligned}$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + (3+1)a^3b + (3+3)a^2b^2 + (1+3)ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}
$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\
&= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
&= a^4+(3+1)a^3b+(3+3)a^2b^2+(1+3)ab^3+b^4 \\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}
$$

Binomialformelen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\
&= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
&= a^4+(3+1)a^3b+(3+3)a^2b^2+(1+3)ab^3+b^4 \\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}
$$

Altså er z_i'ene gitt ved Pascal's trekant!

Binomialformelen

Theorem (Binomialteoremet)

Utrykket $(a+b)^n$ ekspanderer til

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

der

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

og $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Binomialformelen

Theorem (Binomialteoremet)

Utrykket $(a+b)^n$ *ekspanderer til*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

der

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

og $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$*.*

Tallet $\binom{n}{i}$ kalles en binomialkoeffisient. Med andre ord er det binomialkoeffisienter vi finner i Pascal's trekant (kan vises formelt ved induksjon).

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

Binomialkoeffisienter

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

1

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$1$$

$$1 \quad 1$$

Binomialkoeffisienter

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

$$1$$

$$1 \qquad 1$$

$$1 \qquad 2 \qquad 1$$

Binomialkoeffisienter

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Binomialkoeffisienter

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Binomialkoeffisienter

Lemma

For alle naturlige tall n og i med $n \geq i$ er

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}.$$

Merk at dette er den grunnleggende relasjonen i Pascal's trekant!

Binomialkoeffisienter

Bevis.

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$\square$

Binomialkoeffisienter

Bevis.

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!}$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{i}\right)$$

□

Binomialkoeffisienter

Bevis.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{i}\right) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{i+n-i+1}{i(n-i+1)}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Binomialkoeffisienter

Bevis.

$$\begin{aligned}\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}+\frac{n!}{i!(n-i)!}\\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{1}{n-i+1}+\frac{1}{i}\right)\\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{i+n-i+1}{i(n-i+1)}\right)\\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\frac{n+1}{i(n-i+1)}\end{aligned}$$

$\square$

Binomialkoeffisienter

Bevis.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{i}\right) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{i+n-i+1}{i(n-i+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\,\frac{n+1}{i(n-i+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{i!(n-i+1)!}
\end{aligned}
$$

$\square$

Binomialkoeffisienter

Bevis.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{i}\right) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{i+n-i+1}{i(n-i+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\,\frac{n+1}{i(n-i+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{i!(n-i+1)!} \\
&= \binom{n+1}{i}.
\end{aligned}$$

$\square$

Binomialformelen

Hva er koeffisienten for x^{98} når utrykket $(2+x)^{100}$ ekspanderes?

Binomialformelen

Hva er koeffisienten for x^{98} når utrykket $(2+x)^{100}$ ekspanderes?

Svar.

Vi vet fra binomialformelen at

$$(2+x)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 2^i x^{100-i}.$$

Binomialformelen

Hva er koeffisienten for x^{98} når utrykket $(2+x)^{100}$ ekspanderes?

Svar.

Vi vet fra binomialformelen at

$$(2+x)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 2^i x^{100-i}.$$

Leddet med x^{98} får vi når $i = 2$, så koeffisienten foran x^{98} blir

Binomialformelen

Hva er koeffisienten for x^{98} når utrykket $(2+x)^{100}$ ekspanderes?

Svar.
Vi vet fra binomialformelen at

$$(2+x)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 2^i x^{100-i}.$$

Leddet med x^{98} får vi når $i = 2$, så koeffisienten foran x^{98} blir

$$\binom{100}{2} 2^2 = \frac{100!}{2!98!} 4 = \frac{99 \cdot 100}{2} 4 = 2 \cdot 99 \cdot 100 = 19\,800.$$

□

Reelle tall

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$ — intuitvt samlingen av alle desimaltall (uendelig mange desimaler tillatt).

Reelle tall

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$ — intuitvt samlingen av alle desimaltall (uendelig mange desimaler tillatt).

De vanligste delmengdene av $\mathbb{R}$ er intervallene.

Reelle tall

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$ — intuitvt samlingen av alle desimaltall (uendelig mange desimaler tillatt).

De vanligste delmengdene av $\mathbb{R}$ er intervallene.
Lukkede intervaller (endepunktene er med):

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\
(\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.
\end{aligned}$$

Reelle tall

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$ — intuitvt samlingen av alle desimaltall (uendelig mange desimaler tillatt).

De vanligste delmengdene av $\mathbb{R}$ er intervallene.
Lukkede intervaller (endepunktene er med):

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\
(\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

Åpne intervaller (endepunktene er ikke med):

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
(\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{aligned}
$$

Reelle tall

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$ — intuitvt samlingen av alle desimaltall (uendelig mange desimaler tillatt).

De vanligste delmengdene av $\mathbb{R}$ er intervallene.
Lukkede intervaller (endepunktene er med):

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\ (\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}. \end{aligned}$$

Åpne intervaller (endepunktene er ikke med):

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\ (\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \end{aligned}$$

Halvåpne:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Tallverditegn

Tallverdien til $a \in \mathbb{R}$ betegnes med $|a|$, og er definert ved

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0, \\ -a, & \text{hvis } a < 0. \end{cases}$$

Tallverditegn

Tallverdien til $a \in \mathbb{R}$ betegnes med $|a|$, og er definert ved

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0, \\ -a, & \text{hvis } a < 0. \end{cases}$$

Eksempler:

$$|7| = 7, \quad |-3| = 3, \quad |0| = 0.$$

Tallverditegn

Tallverdien til $a \in \mathbb{R}$ betegnes med $|a|$, og er definert ved

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0, \\ -a, & \text{hvis } a < 0. \end{cases}$$

Eksempler:

$$|7| = 7, \quad |-3| = 3, \quad |0| = 0.$$

Merk at $a \leq |a|$ og $-a \leq |a|$ så

$$|a| = \max(a, -a).$$

Trekantulikheten

Lemma

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ *er*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Trekantulikheten

Lemma

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ *er*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bevis.

Vi vet at

$$a \leq |a|, \quad b \leq |b|,$$

Trekantulikheten

Lemma

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ *er*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bevis.

Vi vet at

$$a \leq |a|, \quad b \leq |b|,$$

så

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

Trekantulikheten

Lemma

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ *er*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bevis.

Vi vet at

$$a \leq |a|, \quad b \leq |b|,$$

så

$$a+b \leq |a| + |b|.$$

På samme måte har vi at

$$-a \leq |a|, \quad -b \leq |b| \quad \Longrightarrow \quad -(a+b) \leq |a| + |b|.$$

Trekantulikheten

Lemma

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ *er*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bevis.

Vi vet at

$$a \leq |a|, \quad b \leq |b|,$$

så

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

På samme måte har vi at

$$-a \leq |a|, \quad -b \leq |b| \quad \Longrightarrow \quad -(a+b) \leq |a| + |b|.$$

Men $|a+b| = \max\bigl(a+b, -(a+b)\bigr)$ så

Trekantulikheten

Lemma

For alle $a, b \in \mathbb{R}$ *er*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bevis.

Vi vet at

$$a \leq |a|, \quad b \leq |b|,$$

så

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

På samme måte har vi at

$$-a \leq |a|, \quad -b \leq |b| \quad \Longrightarrow \quad -(a+b) \leq |a| + |b|.$$

Men $|a+b| = \max\big(a+b, -(a+b)\big)$ så

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

$\square$

Rasjonale og irrasjonale tall

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $x = a/b$, med $a, b \in \mathbb{Z}$ kalles et *rasjonalt* tall. Mengden av alle rasjonale tall betegner vi $\mathbb{Q}$,

Rasjonale og irrasjonale tall

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $x = a/b$, med $a, b \in \mathbb{Z}$ kalles et *rasjonalt* tall. Mengden av alle rasjonale tall betegner vi $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Rasjonale og irrasjonale tall

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $x = a/b$, med $a, b \in \mathbb{Z}$ kalles et *rasjonalt* tall. Mengden av alle rasjonale tall betegner vi $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Legg merke til at de hele tallene $\mathbb{Z}$ ligger inne i $\mathbb{Q}$ siden $b = 1$ er tillatt,

Rasjonale og irrasjonale tall

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $x = a/b$, med $a, b \in \mathbb{Z}$ kalles et *rasjonalt* tall. Mengden av alle rasjonale tall betegner vi $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Legg merke til at de hele tallene $\mathbb{Z}$ ligger inne i $\mathbb{Q}$ siden $b = 1$ er tillatt,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Rasjonale og irrasjonale tall

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $x = a/b$, med $a, b \in \mathbb{Z}$ kalles et *rasjonalt* tall. Mengden av alle rasjonale tall betegner vi $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Legg merke til at de hele tallene $\mathbb{Z}$ ligger inne i $\mathbb{Q}$ siden $b = 1$ er tillatt,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Et reelt tall som ikke er rasjonalt sies å være *irrasjonalt*.

Kombinasjoner av rasjonale tall

Kombinasjoner av rasjonale tall

Lemma

Hvis x og y er rasjonale tall så er også $x + y$, $x - y$, xy og x/y (hvis $y \neq 0$) rasjonale tall.

Kombinasjoner av rasjonale tall

Lemma

Hvis x og y er rasjonale tall så er også $x + y$, $x - y$, xy og x/y (hvis $y \neq 0$) rasjonale tall.

Bevis.

Dette følger siden alt blir brøker. Hvis for eksempel $x = a/b$ og $y = c/d$, så er

$$xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$\square$

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall.

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall. Hvis i tillegg både x og y er ulik 0 er også xy og x/y irrasjonale tall.

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall. Hvis i tillegg både x og y er ulik 0 er også xy og x/y irrasjonale tall.

Bevis.

Anta at x er rasjonal og y irrasjonal, vi må vise at $a = x + y$ er irrasjonal.

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall. Hvis i tillegg både x og y er ulik 0 er også xy og x/y irrasjonale tall.

Bevis.

Anta at x er rasjonal og y irrasjonal, vi må vise at $a = x + y$ er irrasjonal. Anta at a er rasjonal. Da er

$$y = a - x$$

også rasjonal

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall. Hvis i tillegg både x og y er ulik 0 er også xy og x/y irrasjonale tall.

Bevis.

Anta at x er rasjonal og y irrasjonal, vi må vise at $a = x + y$ er irrasjonal. Anta at a er rasjonal. Da er

$$y = a - x$$

også rasjonal — en selvmotsigelse siden y jo er antatt å være irrasjonal. Altså må a være irrasjonal. $\square$

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall. Hvis i tillegg både x og y er ulik 0 er også xy og x/y irrasjonale tall.

Bevis.

Anta at x er rasjonal og y irrasjonal, vi må vise at $a = x + y$ er irrasjonal. Anta at a er rasjonal. Da er

$$y = a - x$$

også rasjonal — en selvmotsigelse siden y jo er antatt å være irrasjonal. Altså må a være irrasjonal. □

Eksempler. Tallene $1 + \sqrt{2}$ og $3/\sqrt{7}$ er irrasjonale.

Kombinasjoner av rasjonale og irrasjonale tall

Lemma

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x + y$ og $x - y$ irrasjonale tall. Hvis i tillegg både x og y er ulik 0 er også xy og x/y irrasjonale tall.

Bevis.

Anta at x er rasjonal og y irrasjonal, vi må vise at $a = x + y$ er irrasjonal. Anta at a er rasjonal. Da er

$$y = a - x$$

også rasjonal — en selvmotsigelse siden y jo er antatt å være irrasjonal. Altså må a være irrasjonal. $\square$

Eksempler. Tallene $1 + \sqrt{2}$ og $3/\sqrt{7}$ er irrasjonale. Merk at

$$\frac{3+\sqrt{2}}{12+4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}.$$

Et hjelperesultat

Lemma

Hvis $a \in \mathbb{N}$ *er et oddetall så er* a^2 *også et oddetall.*

Et hjelperesultat

Lemma

Hvis $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er a^2 også et oddetall.

Bevis.

Siden a er et oddetall så er $a = 2n - 1$ for et naturlig tall n.

Et hjelperesultat

Lemma

Hvis $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er a^2 også et oddetall.

Bevis.

Siden a er et oddetall så er $a = 2n - 1$ for et naturlig tall n. Da er

$$a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1$$

Et hjelperesultat

Lemma
Hvis $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er a^2 også et oddetall.

Bevis.
Siden a er et oddetall så er $a = 2n - 1$ for et naturlig tall n. Da er

$$a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1$$

som opplagt er et oddetall. $\square$

Lemma (Konsekvens)
Hvis b^2 er et partall så må b være et partall.

Det fins irrasjonale tall!

Theorem

Tallet $\sqrt{2}$ *er irrasjonalt.*

Det fins irrasjonale tall!

Theorem

Tallet $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

Bevis.

Vi må vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Det fins irrasjonale tall!

Theorem

Tallet $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

Bevis.

Vi må vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Vi antar at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk og skal se at det fører oss på ville veier, altså til en selvmotsigelse. Altså kan vi ikke anta at $\sqrt{2}$ er en brøk, så det er et irrasjonalt tall.

Det fins irrasjonale tall!

Theorem

Tallet $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

Bevis.

Vi må vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Vi antar at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk og skal se at det fører oss på ville veier, altså til en selvmotsigelse. Altså kan vi ikke anta at $\sqrt{2}$ er en brøk, så det er et irrasjonalt tall.

Anta at

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

der a og b er naturlige tall uten felles faktorer.

Det fins irrasjonale tall!

Theorem

Tallet $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

Bevis.

Vi må vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Vi antar at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk og skal se at det fører oss på ville veier, altså til en selvmotsigelse. Altså kan vi ikke anta at $\sqrt{2}$ er en brøk, så det er et irrasjonalt tall.

Anta at

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

der a og b er naturlige tall uten felles faktorer.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Det fins irrasjonale tall!

Theorem

Tallet $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

Bevis.

Vi må vise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Vi antar at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk og skal se at det fører oss på ville veier, altså til en selvmotsigelse. Altså kan vi ikke anta at $\sqrt{2}$ er en brøk, så det er et irrasjonalt tall.

Anta at
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
der a og b er naturlige tall uten felles faktorer.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Altså er $a^2 = 2b^2$ et partall, så dermed er a et partall, $a = 2n$ for en passende $n \in \mathbb{N}$.

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$b^2 = 2n^2.$$

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$b^2 = 2n^2.$$

Altså er b^2 et partall, og dermed er også b et partall.

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$b^2 = 2n^2.$$

Altså er b^2 et partall, og dermed er også b et partall.

Konklusjonen er at om $\sqrt{2} = a/b$ er et rasjonalt tall så må både a og b være partall.

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$b^2 = 2n^2.$$

Altså er b^2 et partall, og dermed er også b et partall.

Konklusjonen er at om $\sqrt{2} = a/b$ er et rasjonalt tall så må både a og b være partall. Men dette strider mot at a og b ikke skal ha felles faktorer — en selvmotsigelse!

Det fins rasjonale tall!

Bevis fortsatt.

Vi setter inn $a = 2n$ i relasjonen $a^2 = 2b^2$ og får

$$2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$b^2 = 2n^2.$$

Altså er b^2 et partall, og dermed er også b et partall.

Konklusjonen er at om $\sqrt{2} = a/b$ er et rasjonalt tall så må både a og b være partall. Men dette strider mot at a og b ikke skal ha felles faktorer — en selvmotsigelse!

Altså kan ikke $\sqrt{2}$ være et rasjonalt tall. $\square$

Arkimedes prinsipp

Arkimedes prinsipp

1. For ethvert reelt tall a fins det et naturlig tall n slik at $n > a$.

Arkimedes prinsipp

1. For ethvert reelt tall a fins det et naturlig tall n slik at $n > a$.
2. For ethvert positivt, reelt tall a fins det et naturlig tall m slik at

$$\frac{1}{m} < a.$$

Det fins mange rasjonale og irrasjonale tall!

Lemma

Etvert åpent intervall inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Karakterisering av rasjonale og irrasjonale tall som desimaltall

Karakterisering av rasjonale og irrasjonale tall som desimaltall

Dersom et rasjonalt tall skrives som desimaltall vil sifrene før eller siden gjenta seg.

Karakterisering av rasjonale og irrasjonale tall som desimaltall

Dersom et rasjonalt tall skrives som desimaltall vil sifrene før eller siden gjenta seg.

$$\frac{1}{2} = 0.500000000000\ldots,$$
$$\frac{1}{3} = 0.333333333333\ldots,$$
$$\frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots.$$

Karakterisering av rasjonale og irrasjonale tall som desimaltall

Dersom et rasjonalt tall skrives som desimaltall vil sifrene før eller siden gjenta seg.

$$\frac{1}{2} = 0.500000000000\ldots,$$
$$\frac{1}{3} = 0.333333333333\ldots,$$
$$\frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots.$$

Dersom et irrasjonalt tall skrives som desimaltall vil sifrene aldri gjenta seg.

Karakterisering av rasjonale og irrasjonale tall som desimaltall

Dersom et rasjonalt tall skrives som desimaltall vil sifrene før eller siden gjenta seg.

$$\frac{1}{2} = 0.500000000000\ldots,$$
$$\frac{1}{3} = 0.333333333333\ldots,$$
$$\frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots.$$

Dersom et irrasjonalt tall skrives som desimaltall vil sifrene aldri gjenta seg.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785 70\ldots,$$
$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415058723669 43\ldots,$$
$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977 57\ldots,$$
$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841 97\ldots.$$

Takk for i dag!