Hvorfor 0 og 1 på datamaskin?

Da er det lett å skille symbolene fra hverandre — robust ovenfor støy.

Dessuten er det enkelt å bare skulle behandle to symboler.

Ulempe: Vi trenger mange 0'er og 1'ere for å representere informasjon.

Tall og siffersystemer (kap. 3 i kump).

88, 3.14, −2.71828 − tall.

Et generelt tall

$$x = d_k d_{k-1} \cdots d_2 d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \cdots\cdots$$

Ex. $x = 3.14$, $d_0 = 3$, $d_{-1} = 1$, $d_{-2} = 4$, $k = 1$

Hvis a og b er heltall, $b \neq 0$

så er $a // b$ − heltallsdelen av a/b.

$a \% b$ − resten når a deles med b.

Ex: $23 // 5 = 4$ $\quad 23 \% 5 = 3$

Heltall i ulike siffersystemer:

$$231 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

I 10-tallsystemet bruker vi sifrene 0-9.
I 7-tallsystemet bruker vi sifrene 0-6.

$$3761 = 13652_7 = 1 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0$$

<u>Def. 3.4</u> La $\beta > 1$ være gitt og la $n_0, n_1, \ldots, n_{\beta-1}$ være β ulike siffere, der n_i angir tallet i. Et tall i β-systemet er på formen $(d_k d_{k-1}, \ldots, d_1 d_0)_\beta$ og tolkes som

$$d_k \beta^k + d_{k-1} \beta^{k-1} + d_{k-2} \beta^{k-2} + \cdots + d_1 \beta^1 + d_0 \beta^0$$

der hver d_j er et av sifrene $(n_i)_{i=0}^{\beta-1}$.

Ex. $\beta = 6$, $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$
$n_4 = 4$, $n_5 = 5$

Et tall kan være

$$45_6 = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6^0 = 24 + 5 = 29_{10}$$

$\beta = 3$, $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$

$$122_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 2 = 17_{10}$$

$\beta = 16$, $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, - -, $n_9 = 9$
$n_{10} = a$, $n_{11} = b$, $n_{12} = c$, $n_{13} = d$
$n_{14} = e$, $n_{15} = f$

Ex. $8ab_{16} = 8 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 = 2048 + 160$
$+ 11 = 2219$

Lemma 3.5. Ethvert naturlig tall kan representeres på en entydig måte i β-tall systemet. ($\beta > 1$).

"Bevis:" ved ett eksempel.

$a = 3761$, $\beta = 8$ - skriv 3761 i 8-tall systemet.

Vi skal da ha at

$$\boxed{3761 = d_3 \cdot 8^3 + d_2\, 8^2 + d_1 \cdot 8^1 + d_0}$$

hvor d_i

da er $3761 = (d_3\, d_2\, d_1\, d_0)_8$, er ett siffer 0-7.

Tre første leddene på høyre side er delige med 8. Altså er d_0 lik resten når 3761 deles med 8.

$d_0 = 3761 \,\%\, 8 = 1$, $3761 \,//\, 8 = 470$

La oss ta heltallsdivisjon på høyre side.

$(d_3 \cdot 8^3 + d_2 \cdot 8^2 + d_1 \cdot 8^1 + d_0) \,//\, 8 = d_3 \cdot 8^2 + d_2 \cdot 8^1 + d_1$

Dermed er

$$470 = d_3 \cdot 8^2 + d_2 \cdot 8^1 + d_1$$

$d_1 = 470 \,\%\, 8 = 6$, $470 \,//\, 8 = 58$

Altså er

$$58 = d_3 \cdot 8 + d_2$$

Vi har $d_2 = 58 \,\%\, 8 = 2$. $58 \,//\, 8 = 7$

Divisjon med 8 gir til slutt

$7 = d_3$. Dermed er

$3761 = 7261_8$

Algoritme for å finne repr. i β-systemet:

La a være et tall som har k siffer i β-tall systemet. Disse kan vi finne ved å utføre:

$$\left.\begin{aligned} d_0 &= a \,\%\, \beta \\ a_1 &= a \,//\, \beta \\ d_1 &= a_1 \,\%\, \beta \\ a_2 &= a_1 \,//\, \beta \\ &\vdots \\ d_k &= a_k \,\%\, \beta \end{aligned}\right\}$$

$a_0 = a$

for $i = 0, 1, \ldots, k$

$\quad d_i = a_i \,\%\, \beta;$

$\quad a_{i+1} = a_i \,//\, \beta;$

Vi skriver ofte beregningene i en tabell:

$$3761 = 7261_8$$

3761	1
470	6
58	2
7	7

3761 i 2-tall systemet:

$$3761 = (1110 \,|\, 1011 \,|\, 0001)_2$$

3761	1
1880	0
940	0
470	0
235	1
117	1
58	0
29	1
14	0
7	1
3	1
1	1