Taylors formel med restledd.

Taylors formel:

Gitt f og en $a \in \mathbb{R}$. Da kan vi finne polynomet g_n av grad n som tilfredsstiller

$$g_n(a) = f(a), \quad g_n'(a) = f'(a), \quad g_n''(a) = f''(a)$$
$$\ldots \quad g_n^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a), \quad g_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Da er g_n gitt ved

$$g_n(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Hvis $f(x) = e^x$, $a=0$ så er

$$g_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

Restledd

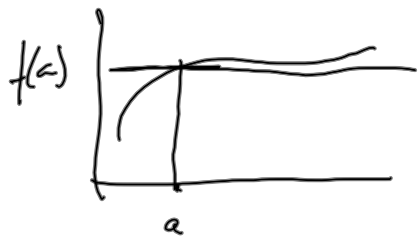
Når vi tilnærmer f med Taylorpolynomet av grad n $T_n f(x)$, så gjør vi feil $R_n f(x)$. Kan vi finne en formel for denne feilen?

Vi har $f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$$

Begynner med $n=0$, så $n=1$, $n=2$ og ser systemet. Utgangspunkt:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$



Sett $b = x$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x 1\cdot f'(t)\,dt$$

$$= T_0 f(x) + R_0 f(x)$$

For å finne $R_1 f(x)$ bruker vi delvis integrasjon:
$\int u v' = uv - \int u' v$. Skal delvis integrere

$$\int_a^b 1 \cdot f'(t)\,dt \quad , \quad u = f'(t) , \quad v' = 1$$

$$u' = f''(t) , \quad v = t - b$$

$\int u v' = uv - \int u' v$

$$= \left[f'(t)(t-b) \right]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

jobber i intervallet $[a,b]$
$a < b$

$$= -f'(a)(a-b) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

$$= f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

Sett $b = x$.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$= T_1 f(x) + R_1 f(x)$$

Fra grad 1 til grad 2.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b f''(t)\,(b-t)\,dt$$

Delvis integrasjon:

$\int u v' = u v - \int u' v$

Velg $u = f''(t)$, $v' = (b-t)$

$u' = f'''(t)$, $v = -\frac{1}{2}(b-t)^2$

$$= \left[f''(t) \left(-\tfrac{1}{2}(b-t)^2\right) \right]_a^b - \int_a^b f'''(t)\left(-\tfrac{1}{2}(b-t)^2\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)\,(b-t)^2\,dt$$

Generelt får vi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

$$= T_n f(x) + R_n f(x)$$

Restleddet kan også skrives som

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ der $c \in (a,x)$ avhenger av x

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c),$$

$c \in (a,x)$

Ex 11.2.3.

Anta at vi ønsker å beregne e med feil mindre enn 10^{-3} (vi har ikke tilgang til lommeregner med e innebygget)

Vi vet at (sett $f(x) = e^x$, $a=0$)

$$e^x \approx T_n f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$e = e^1$, så hvis vi setter $x=1$ får vi en tilnærming til e,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Feil: Vi vet at feilen for grad n er

$$R_n e^x = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad f(x) = e^x,\ x \geq a$$

$a = 0$

$c \in (a, x)$

$$= \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \qquad f^{(n+1)}(x) = e^x$$

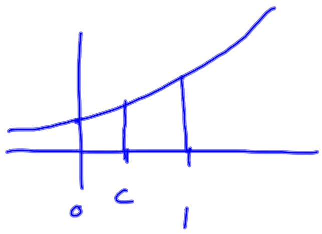
Vi er interessert i feilen når $x = 1$.

$$R_n e^1 = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad c \in (0,1)$$

Når $c \in (0,1)$ er $e^c < e^1 < 3$

Altså er

$$R_n e^1 = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$



Hvis vi krever $\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$ vil garantert $R_n e^1 \leq 10^{-3}$

Vi prøver ulike verdier av n og får $\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$ første gang for $n=6$,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

Ex. 11.2.4. Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil

mindre enn 10^{-4}.

$$T_{2n} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Vi erstatter $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad $2n$, og bruker integralet som da framkommer som tilnærming til $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \frac{T_{2n} \sin x}{x}\,dx .$$

Dessuten er

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{T_{2n}\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x - T_{2n}\sin x}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx$$

$$R_{2n} f(x) = \frac{1}{(2n+1)!}(x-a)^{2n+1} f^{(2n+1)}(c), \quad c \in (a, x)$$

$a=0$

$$R_{2n} \sin x = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n \cos c \qquad f(x) = \sin x$$

$$|R_{2n} \sin x| = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}|\cos c| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx\right|$$