Ex 11.2.4. Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil mindre enn 10^{-4}.

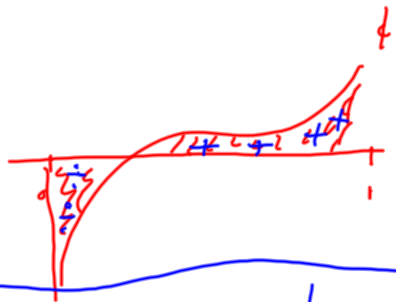
$$T_{2n}\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$R_{2n}\sin x = \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad c\in(0,x), \quad f(x)=\sin x$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_{2n}\sin x}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx$$

Feil $\left|\int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{R_{2n}\sin x}{x}\right| dx$

$$\int_0^1 \left|\frac{R_{2n}\sin x}{x}\right| dx = \int_0^1 \left|\frac{f^{(2n+1)}(c)\,x^{2n+1}}{(2n+1)!\,x}\right| dx$$



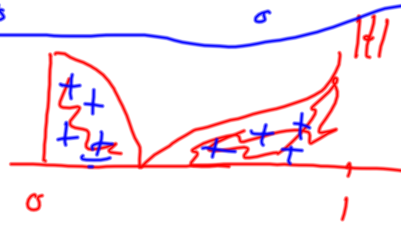
$$= \int_0^1 \left|\frac{(-1)^n\cos c \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}\right| dx$$

$$\boxed{\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |f(x)|\,dx}$$

$$= \int_0^1 \frac{|\cos c|\;x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx$$

$$\le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$$



Hvis $\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \le 10^{-4}$ vil også feilen bli mindre enn 10^{-4}. Dette skjer første gang for $n=3$. $T_6\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Ex. 11.2.5

Hva er $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$?

Ved L'Hopital får vi at grensen er $\frac{1}{24}$.

Vi har

$$T_5 \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_5 \cos x$$

Da er

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + R_5 \cos x - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + R_5 \cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{24} + \frac{R_5 \cos x}{x^4} \right)$$

$$= \frac{1}{24} + \lim_{x\to 0} \frac{R_5 \cos x}{x^4}$$

$$R_5 \cos x = \frac{f^{(6)}(c)\, x^6}{6!} \qquad c \in (0, x) \qquad f(x) = \cos x$$

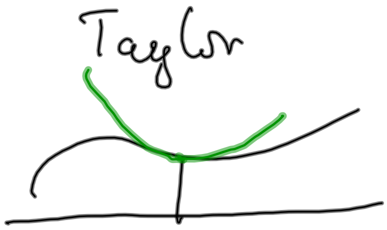
$$= \frac{-\cos c \cdot x^6}{6!}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_5 \cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos c \cdot x^6}{6!\, x^4}$$

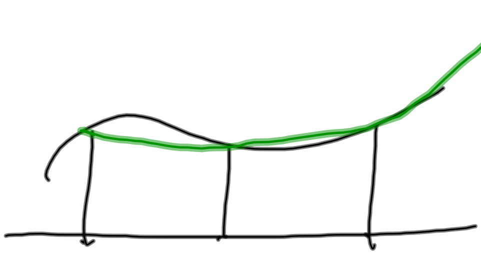
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos c \cdot x^2}{6!} = 0$$

Polynom interpolasjon.

Med Taylorpolynomer finner vi en tilnærming til en funksjon som er veldig god nær ett punkt a. Langt bort fra a vil vi vanligvis ha en dårlig tilnærming.

Med interpolasjon tvinger vi et polynom til å ha samme verdi som f i ulike punkter





Interpolasjonsproblemet

Seksjon 9.2
i kompendiet.

La f være gitt og la $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ være $n+1$ tall i definisjonsområdet $[a,b]$ til f. Vi ønsker å finne et polynom P_n av grad n slik at

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n(x_1) = f(x_1), \ldots, P_n(x_n) = f(x_n).$$

P_n - interpolanten til f.

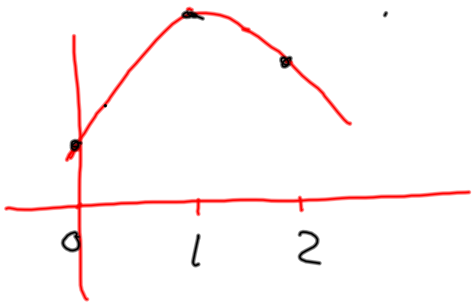
Dette er rimelig å forsøke å få til siden $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$ har $n+1$ frie koeffisienter.

Ex. 9.12

Gitt tre punkter

(0,1), (1,3), (2,2)

Vi skal ha et polynom av grad 2 slik at



$P_2(0) = 1, \quad P_2(1) = 3, \quad P_2(2) = 2.$

$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= P_2(0) = c_0 \\ 3 &= P_2(1) = c_0 + c_1 + c_2 \\ 2 &= P_2(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_0 = 1, \; c_1 = \frac{7}{2}, \; c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Newtonformen til et polynom av grad n, basert på tallene $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = {} & c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ & + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}}$$

La oss forsøke å finne interpolasjons-polynomet når vi skriver det på Newtonform.

Ex. Gitt $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$. Finn P_1 s.a. $P_1(x_0) = f(x_0)$, $P_1(x_1) = f(x_1)$

Newton form for P_1: $P_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$

Betingelser

$$f(x_0) = P_1(x_0) = c_0, \quad f(x_1) = P_1(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow c_1(x_1 - x_0) = f(x_1) - c_0$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Så

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Ex. $n=2$.

Gitt $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$

Finn P_2 slik at

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2(x_1) = f(x_1), \quad P_2(x_2) = f(x_2)$$

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

Betingelser:

$$f(x_0) = P_2(x_0) = c_0$$

$$f(x_1) = P_2(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$f(x_2) = P_2(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$c_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$$

Dette kan generaliseres til flere punkter.
Konklusjonen er at det fins et
entydig (ett og bare ett) polynom av
grad n som går gjennom de $n+1$
punktene $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

La oss innføre notasjonen

$c_i = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_i]$, $\quad c_0 = f[x_0] = f(x_0)$

Husk at $\quad c_0 = f(x_0)$, $\quad c_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Det viser seg at

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$

$f(x_0)$

$$i=1, \quad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$f(x_1)$