Polynom interpolasjon.

1. Problem. Gitt (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ alle x_i'ene forskjellige. Finn polynom P_n av grad n slik at $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

2. Det fins et entydig polynom P_n som løser problemet

3. Skriv P_n på Newton form

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

$c_0, c_1, \ldots, c_n$ – frie koeffisienter

Kan finne c_i'ene en etter en.

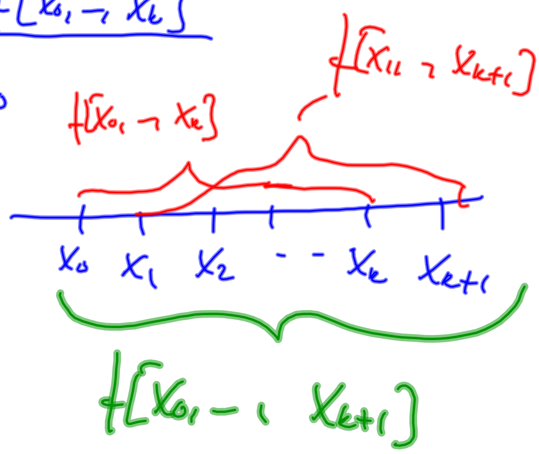
4. Anta at $y_i = f(x_i)$.

4. Anta at $y_i = f(x_i)$. Da avhenger c_k kun av f og $x_0, \ldots, x_k$,

$$c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]. \quad , \quad c_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

Vi har at

$$f[x_0, \ldots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k+1}] - f[x_0, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$$



$$f[x_k] = f(x_k).$$

$f[x_0, \ldots, x_k]$ kalles den dividerte differensen til f i $x_0, \ldots, x_k$.

5. Algoritme

$$c_k = f[x_0, \dots, x_k]$$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] = f(x_0) & & & & \\
x_1 & f[x_1] = f(x_1) & \to f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] = f(x_2) & \to f[x_1, x_2] & \to f[x_0, x_1, x_2] & & \\
x_3 & f[x_3] = f(x_3) & \to f[x_2, x_3] & \to f[x_1, x_2, x_3] & \to f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
\cancel{x_4} & \cancel{f[x_4] = f(x_4)} & \cancel{\to f[x_3, x_4]} & \cancel{\to f[x_2, x_3, x_4]} & \cancel{\to f[x_1, x_2, x_3, x_4]} &
\end{array}$$

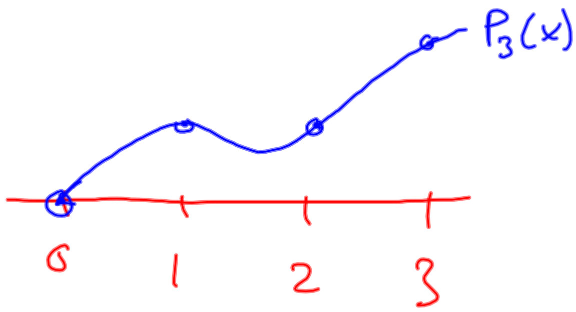
$$P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Eks

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	2



Divdiff tabell

	x	$f(x)$ c_0	c_1	c_2	c_3
x_0	0	0			
x_1	1	1	1		
x_2	2	1	0	$-1/2$	
x_3	3	2	1	$1/2$	$\frac{1}{3}$

$$P_3(x) = 0 + (x-x_0) - \tfrac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1) + \tfrac{1}{3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$= x - \tfrac{1}{2}x(x-1) + \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

Merk at $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

der $\xi \in (a, b)$

$$a = \min_i x_i, \qquad b = \max_i x_i$$

generalisering av middelverdisetningen

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c), \quad c \in (x_0, x_1)$$

Nullpunkter for funksjoner

Fra skolen: Løse lineære ligninger, andregradsligninger, pluss noen andre.

Løse: Finne formel for løsningen.

Problem: Masse ligninger lar seg ikke løse med formel, eller formelen blir forferdelig komplisert.

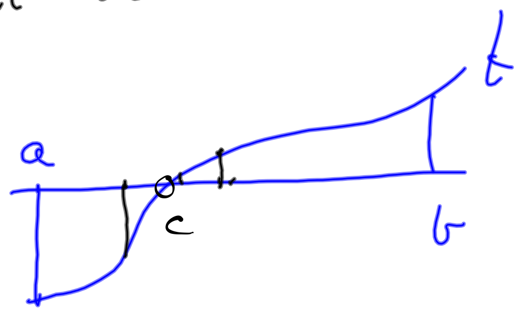
Halveringsmetoden.

(Mellomverdisetningen) & skjæringssetningen

Anta at f er en funksjon som er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ og har motsatt fortegn i a og b.

Da fins det et reelt tall c slik at

$f(c)=0$

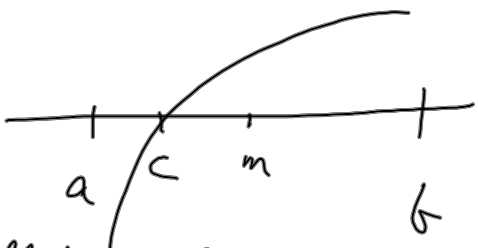


Ex $f(x)=x^2-2$

Feil i halveringsmetoden.

Hvis vi vet at f har et nullpkt c i (a,b) og vi bruker midtpunktet som estimat er feilen begrenset av

$$|c-m| \le \frac{b-a}{2}$$



Etter N runder med halveringer er intervallbredden $\frac{b-a}{2^N}$ så feilen er da

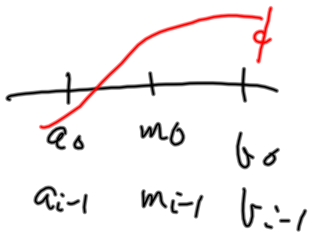
$$|c-m_N| \le \frac{b-a}{2^{N+1}}$$

Hvis vi ønsker feil mindre enn ε kan vi kreve

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon$$

Kan løse og får $N \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$

Algoritme



$a_0 = a$

$b_0 = b$

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$\quad m_{i-1} = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$

$\quad$ if $f(m_{i-1}) == 0$

$\qquad a_i = b_i = m_{i-1}$

$\quad$ if $f(a_{i-1}) f(m_{i-1}) < 0$

$\qquad a_i = a_{i-1}; \quad b_i = m_{i-1}$

$\quad$ else

$\qquad a_i = m_{i-1}; \quad b_i = b_{i-1}$

$m_N = (a_N + b_N)/2$