Kap. 10

Fra i går: $m_N$ estimat etter $N$ iterasjoner av bisetsjonsmetoden

Absolutt feil etter $N$ iterasjoner: $|c - m_N| \leq \frac{b-a}{2^{N+1}}$

Relativ feil: $\frac{|c - m_i|}{|c|} \lesssim \frac{b-a}{2^{i+1}|c|} \approx \frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|}$

(siden $m_i \approx c$, og vi ikke vet $c$)

relativ feil $\leq \varepsilon$ hvis $\frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|} \leq \varepsilon \iff \underline{\frac{b-a}{2^{i+1}}} \leq \varepsilon |m_i|$

$\iff \boxed{\underline{\text{abs. feil}} \leq \varepsilon |m_i|}$

Alg 10.9 Revidert algoritme for bisekjonsmetoden

($N$ = antall iterasjoner)
($\varepsilon$ = relativ feil)

$i = 0$

$m = \frac{a+b}{2}$;

$abserr = \frac{b-a}{2}$;

while $i \le N$ and $abserr > \varepsilon |m|$

  if $f(m) == 0$

    $a = b = m$;

  if $f(a) f(m) < 0$

    $b = m$;

  else

    $a = m$;

  $i = i + 1$;

  $m = \frac{a+b}{2}$

  $abserr = \frac{|b-a|}{2}$;

Eks: $f(x) = x^2 - 2$ har nullpkt $\sqrt{2}$, som ligger i $[1,2]$

Obs 10.8: 54 iterasjoner skal være nok for 64 bits flyttall, for å oppnå full presisjon.

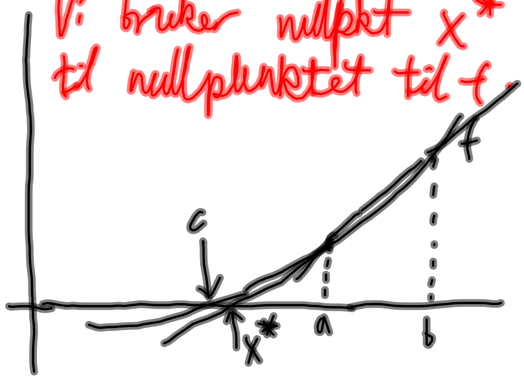
---

Sekantmetoden

Ide: La $f$ være kont., definert i $a$ og $b$.
Sekanten gjennom $a$ og $b$ er gitt ved

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(b) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b)$$

Vi bruker nullpkt $x^*$ til $s(x)$ som en approksimasjon til nullpunktet til $f$.



Uttrykk for $x^*$:

$$s(x^*) = 0 \iff f(b) + \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x^* - b) = 0$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x^* = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}b - f(b)$$

$$x^* = b - \frac{a-b}{f(a)-f(b)}f(b) = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(b)$$

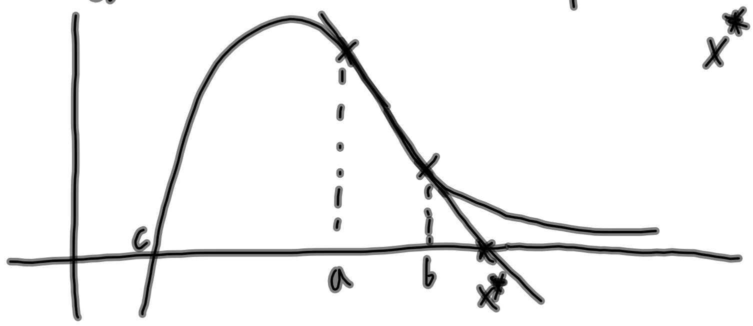
Impl. av sekantmetoden: Starter $x_0 = a$, $x_1 = b$, deretter $x_2 = x^*$, bruker så sekantmetoden med $x_1$ og $x_2$, finner ny $x^* = x_4$

Alg 10.1 : $\overbrace{x_n}^{x^*} = \overbrace{x_{n-1}}^{b} - \dfrac{x_{n-1} - \overbrace{x_{n-2}}^{a}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}) \quad n = 2, 3, \ldots$

**Eks:** Sett $f(x) = x^2 - 2$, velg $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

Sekantmetoden blir:
$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{(x_{n-1}^2 - 2) - (x_{n-2}^2 - 2)}(x_{n-1}^2 - 2)$$
$$= x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2}(x_{n-1}^2 - 2)$$
$$= x_{n-1} - \frac{1}{x_{n-1} + x_{n-2}}(x_{n-1}^2 - 2)$$

Fig 10.7: Sekantmetoden kan feile, d.v.s. det er ikke sikkert den finner et nullpkt.




$x^*$ ligger til høyre for a, b

Obs 10.2: Test på rel. feil i sekantmetoden forekommer ofte ved å sjekke om $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon |x_n|$

Alg. 10.13 Revidert sekantmetode:

```
i = 0;
xpp = x0;
xp = z = x1;
abserr = |z|;
while i ≤ N and abserr ≥ ε|z|
    z = xp - f(xp)(xp - xpp)/(f(xp) - f(xpp))
    abserr = |z - xp|;
    xpp = xp;
    xp = z;
    i = i+1;
```

Teorem 10.14

Hvis $f, f', f''$ er kont. på intervallet $I$, og $I$ inneholder $c$ med $f(c) = 0$, og også $|f'(x)| > \gamma > 0$ i $I$,
Da finnes $K$ s.a. for alle startverdier nær nok til $c$, så vil sekantmetoden konvergere mot $c$, og feilen $e_n = c - x_n$ tilfredsstiller $|e_n| \leq K|e_{n-1}|^r$ $n = 2, 3, \ldots$
der $r = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618$

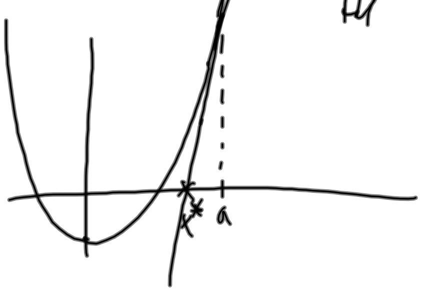
Bevises ikke

Obs 10.15: Når sekantmetoden kom til $c$ der $f'(c) \neq 0$, og hvis $K \approx 1$, så vil, siden $r \approx 1.618$, vi få minst 62 % fler riktige siffer til $c$ når vi bruker sekantmetoden, fra $k$ der $|e_k| \approx 10^{-1}$ (62% svarer til desimal del i 1,618)

$$e_k \approx 10^{-1}$$
$$e_{k+1} \approx 10^{-r} \approx 10^{-1.618}$$

Newtons metode:

Ide 10.17: Tilnærm nullpunkt c til f ved å finne nullpkt til tangent til f i a (bør starte med a nær c)




tangent: $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$x^*$ blir: $f(a) + f'(a)(x^* - a) = 0$

$$f'(a)x^* = f'(a)a - f(a)$$

$$\underbrace{x^*}_{x_n} = \underbrace{a}_{x_{n-1}} - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Iterasjon: Newtons metode:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Algoritme:

```
⋮
while i ≤ N and abserr ≥ ε|z|
   z = xp - f(xp)/f'(xp);
   abserr = |z - xp|
   xp = z
   ⋮
```

Lemma 10.19 $c$ nullpkt. for $f$, og $f', f''$ er kont.,
definer $e_n = x_n - c$

Det fins da en $\xi_n$ mellom $c$ og $x_n$ s.a.

$$e_{n+1} = \underbrace{\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}}_{K} e_n^{2 \rightarrow r}$$

Bevis: $x_{n+1} - c = x_n - c - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\frac{f''(\xi_n)}{2} e_n^2}{f'(x_n)}$$

Taylor av $f$ om $x_n$, regnet ut i $c$:

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}(c - x_n)^2$$, der $\xi_n$ mellom $c$ og $x_n$

$$\underbrace{-f(x_n) + (x_n - c)f'(x_n)}_{e_n f'(x_n) - f(x_n)} = \frac{f''(\xi_n)}{2} e_n^2$$

Teorem 10.20

Anta $f, f', f''$ kont. på $I$, og $c \in I$ med $f(c) = 0$

anta også $|f'(x)| > \delta > 0$ for alle $x \in I$.

Finnes da en $K$ s.a. for alle startpkt $x_0$ nær nok $c$, så vil Newtons metode konvergere, og feilen $e_n = x_n - c$ vil oppfylle

$$|e_{n+1}| \leq K|e_n|^2$$

Eks.

$f(x) = x^2 - 2 = 0 \qquad c = \sqrt{2}$

steget i Newtons metode: $x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}$