Kapittel 11 i komp. seksjon 11.1.

Numerisk derivasjon.

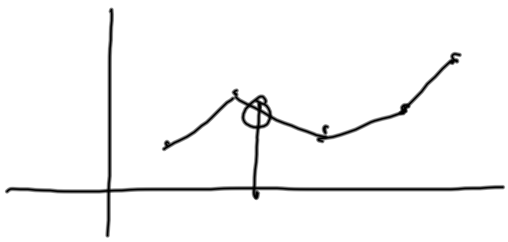
Def av derivert:

For en funksjon f er $f'(a)$ definert ved

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Anta at vi bare har en funksjon i Python der vi kan oppgi a og så får vi ut $f(a)$.

Hvordan kan vi da finne $f'(a)$?



Enkel strategi:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h > 0.$$

Svarer til å tilnærme f med sekanten gjennom $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ og bruke den deriverte av denne sekanten som tilnærming til $f'(a)$.

Eks 11.3. $f(x) = \sin x$, $a = 0.5$

$$\text{Feil} = E(f; a, h) = f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \cos 0.5 - \frac{\sin(0.5+h) - \sin 0.5}{h}$$

h	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Feil
10^{-1}	0.852169...	$2.5 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0.87517...	$2.4 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	0.87734...	$2.4 \cdot 10^{-4}$
$\vdots$		
10^{-6}	0.8775823...	$2.4 \cdot 10^{-7}$

Kan vi finne ut hvorfor feilen oppfører seg som den gjør?

Avrundingsfeil.

Vanligvis vil ikke $f(a)$ være et flyttall. Da vil $f(a)$ bli tilnærmet med det nærmeste flyttallet $\overline{f(a)}$.

Den relative feilen i denne tilnærmingen er maksimalt $6 \cdot 10^{-16}$ (lemma 5.21, komp)

Hvis vi setter

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{f(a)} - f(a)}{f(a)}$$

(relativ feil med fortegn)

så er $|\varepsilon_1| \leq 6 \cdot 10^{-16} = \varepsilon^*$

$$\overline{f(a)} = f(a)(1 + \varepsilon_1)$$

På samme måte

$$\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1 + \varepsilon_2)$$

Virkelig feil:

$$f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h}$$

Divisjon etc skaper ikke kritiske problemer.

$$\overline{f(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1)$$

$$\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2)$$

$$= f'(a) - \frac{f(a+h)(1+\varepsilon_2) - f(a)(1+\varepsilon_1)}{h}$$

$$= f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

$$= -\frac{h}{2} f''(\xi_h) - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

Når $h \to 0$ vil $f(a+h) \to f(a)$

og $f''(\xi_h) \to f''(a)$

$$\approx -\frac{h}{2} f''(a) - \frac{f(a)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

$$= -\frac{h}{2} f''(a) - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} f(a)$$

Ta tallverdi av feilen

$$= \left| \frac{h}{2} f''(a) + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} f(a) \right|$$

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| \approx \left| -\frac{h}{2} f''(a) - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} f(a) \right|$$

$$= \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|}{h} |f(a)|$$

$$\le \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{2\varepsilon^*}{h} |f(a)|$$

$|\varepsilon_1| \le \varepsilon^*$

$|\varepsilon_2| \le \varepsilon^*$

Endelig, tilnærmet feil:

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| \qquad f(x) = \sin x$$

$$a = 0.5$$

$$\lesssim \frac{h}{2}\left|f''(a)\right| + \frac{2\varepsilon^*}{h}\left|f(a)\right|$$