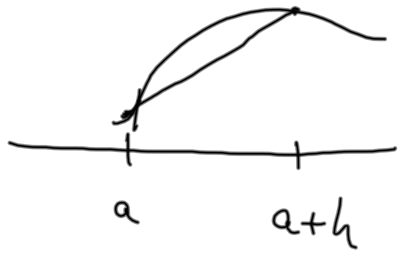
Kapittel 11 i komp., seksjon 11.1

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h > 0$$

Når vi regner ut høyre side på datamaskin får vi



$$\boxed{\frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h}}$$

der $\overline{f(a)}$ er nærmeste flyttall til $f(a)$.

$$\underbrace{f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h}}_{E(f;\, a,\, h)} \approx -\frac{h}{2} f''(a) - \frac{2\,\varepsilon(h)}{h} f(a)$$

Hvis jeg velger en bestemt h når $f(x) = \sin x$, $a = 0.5$, så er alt bortsett fra $\varepsilon(h)$ kjent i "ligningen" over

$h = 10^{-7}$ gir $E(f;a,h) \approx 2.5 \cdot 10^{-8}$

$$\varepsilon(h) \approx -\frac{h}{2f(a)}\left(E(f;a,h) + \frac{h}{2} f''(a)\right) \approx -7.6 \cdot 10^{-17}$$

$h = 10^{-11}$ gir $\varepsilon(h) \approx -1.3 \cdot 10^{-17}$

$h = 10^{-14}$ gir $\varepsilon(h) \approx -5.3 \cdot 10^{-18}$

Presist feilestimat

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| = \left| -\frac{h}{2} f''(\xi_h) - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h} \right|$$

Trekantulikheten

$$\leq \left| -\frac{h}{2} f''(\xi_h) \right| + \left| \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h} \right| \qquad \xi_h \in (a, a+h)$$

ε_1 - rel. feil når $f(a)$ erstattes med $\overline{f(a)}$

$$= \frac{h}{2} \left| f''(\xi_h) \right| + \frac{1}{h} \left| f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1 \right|$$

Trekantulikhet

$$\leq \frac{h}{2} \left| f''(\xi_h) \right| + \frac{1}{h} \left(|f(a+h)||\varepsilon_2| + |f(a)||\varepsilon_1| \right)$$

Tilsv. for $\varepsilon_2, f(a+h)$

$$\leq \frac{h}{2} \underbrace{\max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|}_{M_1} + \frac{1}{h} \left(|f(a+h)||\varepsilon_2| + |f(a)||\varepsilon_1| \right)$$

$$\leq \frac{h}{2} M_1 + \frac{1}{h} \left(\underbrace{\max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|}_{M_2} |\varepsilon_2| + \underbrace{\max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|}_{M_2} |\varepsilon_1| \right)$$

$$= \frac{h}{2} M_1 + \frac{M_2}{h} \left(|\varepsilon_2| + |\varepsilon_1| \right)$$

$$\leq \frac{h}{2} M_1 + \frac{M_2}{h} 2\varepsilon^*$$

Feilen oppfører seg som

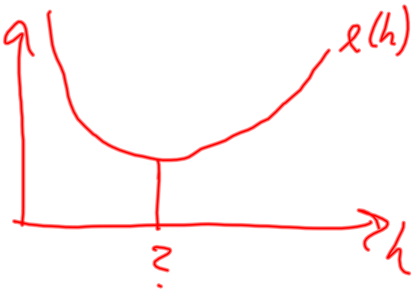
$$|E(f;a,h)| \approx \frac{h}{2}|f''(a)| + \frac{2\varepsilon^*}{h}|f(a)|$$

Vi setter

$$e(h) = \frac{h}{2}|f''(a)| + \frac{2\varepsilon^*}{h}|f(a)|$$

Hva er best mulige verdi av h?

Vi deriverer $e(h)$ og setter lik null.



$$e'(h) = \frac{1}{2}|f''(a)| - \frac{2\varepsilon^*}{h^2}|f(a)| = 0$$

$$\frac{2\varepsilon^*}{h^2}|f(a)| = \frac{1}{2}|f''(a)|$$

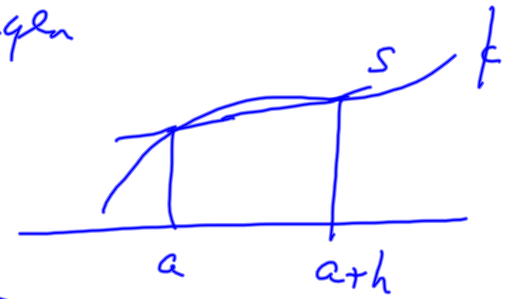
$$h^2 = \frac{4\varepsilon^*|f(a)|}{|f''(a)|}, \qquad h = 2\sqrt{\frac{\varepsilon^*|f(a)|}{|f''(a)|}}$$

Andre metoder for numerisk beregning av deriverte.

Tilnærmingen $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

får vi ved å tilnærme $f(x)$ med sekanten $s(x)$ gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ og så bruke tilnærmingen

$$f'(a) \approx s'(a)$$



Grunnleggende ide for å utlede andre metoder

1. Tilnærm f med et interpolasjonspolynom p av passende grad

2. Tilnærm den deriverte med

$$f'(a) \approx p'(a)$$

Ny metode for $f'(a)$

1. Interpoler f i $a-h,\ a,\ a+h$ med et kvadratisk polynom P_2

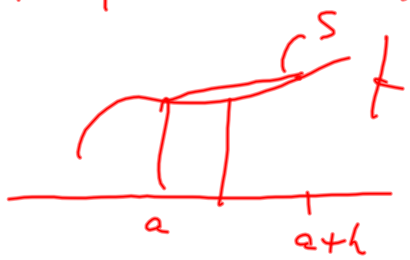
$$P_2(x) = f(a-h) + f[a-h, a](x-(a-h)) + f[a-h, a, a+h](x-(a-h))(x-a)$$

2. Sett $f'(a) \approx P_2'(a)$

$$P_2'(x) = f[a-h, a] + f[a-h, a, a+h](x-a + x-(a-h))$$
$$= f[a-h, a] + f[a-h, a, a+h](2x-2a+h)$$

$$P_2'(a) = f[a-h, a] + f[a-h, a, a+h]\,h$$
$$= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

, $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$



Feil:

$$|E_2(f; a, h)| \approx \frac{h^2}{6}|f'''(a)| + \frac{\varepsilon^* |f(a)|}{h}$$

En metode basert på interpolasjon i 4 pkt.

1. Interpoler f i $a-2h$, $a-h$, $a+h$, $a+2h$ med et kubisk polynom P_3.

$$P_3(x) = f(a-2h) + f[a-2h, a-h](x-(a-2h)) \ldots$$

2. $$f'(a) \approx P_3'(a) = \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h}$$

$$\text{Feil} \approx \frac{h^4}{18}|f^{iv}(a)| + \frac{3\varepsilon^*}{h}|f(a)|$$

Tilnærming av $f''(a)$

1. Interpoler f i $a-h$, a, $a+h$ med et kvadratisk polynom P_2

2. Bruk tilnærmingen

$$f''(a) \approx P_2''(a)$$

$$P_2(x) = f(a-h) + f[a-h, a](x-(a-h)) + f[a-h, a, a+h](x-(a-h))(x-a)$$

$$P_2''(x) = 2f[a-h, a, a+h] = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

$$f''(a) \approx \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

$$\text{Feil} \approx \frac{h^2}{12}|f^{iv}(a)| + \frac{3\varepsilon^*}{h^2}|f(a)|$$