Fra sist: Definerte midtpunktsmetoden for numerisk integrasjon.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) = I_{mid}$$

Total feil: $|I - I_{mid}| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - h f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - h f(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|}_{\text{lokal feil fra i går}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{24} M_i$$

$h = |x_i - x_{i-1}|$

$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''|$

$hn = b - a$

(siden $M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \le \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \overset{\text{def}}{=} M$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{24} M_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{24} M = \frac{h^3}{24} n M = \frac{hn}{24} h^2 M = \underline{\underline{\frac{(b-a) h^2 M}{24}}}$$

Teorem 12.8: f, f', f'' kont på $[a,b]$, La I_{mid} være tilnærming til $I = \int_a^b f(x)\,dx$ med midtpunktsmetoden. Da er

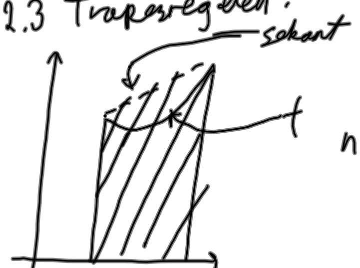
$$|I - I_{mid}| \le \frac{(b-a)}{24} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Andre tilnærminger til integrasjon:

Tilnærm f på hver $[x_{i-1}, x_i]$ med 1. sekanten gjennom x_{i-1}, x_i

2. parabel gjennom $x_{i-1}, x_i, x_{i-\frac{1}{2}}$

12.3 Trapesregelen:



$$I_{trap} = h \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)$$

n delintervaller: $\sum_{i=1}^{n} h \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)$

$$= h \frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h f(x_i) + \frac{h f(b)}{2}$$

$$= h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

12.4 Simpsons metode

Finn parabel som interpolerer i x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, og tilnærm med integralet av denne.

$$\int_a^b f(x) \approx I_{simp}(h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right)$$

Resultat: $|I - I_{trap}| \leq (b-a)\frac{h^2}{6} \max |f''(x)|$ (f, f', f'' kont)

$|I - I_{simp}| \leq (b-a)\frac{h^4}{2880} \max |f^{(iv)}(x)|$ ($f, f', f'', f''', f^{(iv)}$ kont)

Viktig: I_{simp} gir bedre tilnærming til I, siden $h^4 \to 0$ raskere enn hva h^2 gjør.

kap 10 i Kalkulus:

Differensiallikning: En likning der en funksjon er ukjent, og der funksjonen og dens deriverte.

10.1 Førsteordens lineære differensiallikninger har formen:

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \qquad (*)$$

Gå tilbake til oppg 4.2.18 i Kalkulus:
Har vunnet 10 mill. i lotto, 6% rente på penger i bank
Tar ut $(1.02)^n a$ hvert år

Fikk differenslikning: $x_{n+1} = 1.06x_n - (1.02)^n a$

Tenk i stedet at vi har $y(t)$ på konto ved tid t,
at vi har løpende rente,
og at vi tar ut penger fortløpende.

$$y(t+\Delta t) - y(t) = 1.06\,y(t)\Delta t - (1.02)^t a\,\Delta t$$

del med Δt, la $\Delta t \to 0$

$$y'(t) = 1.06\,y(t) - (1.02)^t a \iff y'(t) \underbrace{-1.06}_{f(t)} y(t) = \underbrace{-(1.02)^t a}_{g(t)}$$

10.1.3 (setning)
Anta f, g er kont. på I, F en antiderivert til f. Løsningene på $(*)$ er

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int \underbrace{e^{F(x)}}_{\text{integrerende faktor}} g(x)\,dx + C\right)$$

Bevis: gang med $e^{F(x)}$ på begge sider:

$$y'(x)e^{F(x)} + \underline{f(x)}y(x)\underline{e^{F(x)}} = g(x)e^{F(x)} \qquad \left|\left(e^{F(x)}\right)' = f(x)e^{F(x)}\right.$$

$$y'(x)e^{F(x)} + y(x)\left(e^{F(x)}\right)' = g(x)e^{F(x)}$$

$$\left(y(x)e^{F(x)}\right)' = g(x)e^{F(x)}$$

$$y(x)e^{F(x)} = \int e^{F(x)}g(x)\,dx + C$$

$$\underline{\underline{y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)\,dx + C\right)}}$$

Eksempel med penger på konto:

Hadde $f(t) = -1.06 \qquad g(t) = -(1.02)^t a$

$F(t) = -1.06t$

$$y(t) = e^{1.06t}\left(\int -e^{-1.06t} a (1.02)^t dt + C\right)$$

$(-1.06 + \ln 1.02)t$

$$= e^{1.06t}\left(-a\int e^{-1.06t} e^{(\ln 1.02)t} dt + C\right)$$

$$= e^{1.06t}\left(\frac{-a}{-1.06 + \ln 1.02} e^{(-1.06 + \ln 1.02)t} + C\right)$$

$$= \underline{\frac{a}{1.06 - \ln 1.02}(1.02)^t + Ce^{1.06t}}$$

$e^{(\ln 1.02)t}$, $e^{1.06t}$ går raskere mot ∞

hvis $C > 0$: antall penger $\to \infty$

$C < 0$: vi går konkurs.

Eks: $y' + \underbrace{\cos x}_{f}\, y = \underbrace{\cos x}_{g} \qquad F(x) = \sin x$

$u = \sin x$

$$y(x) = e^{-\sin x}\left(\int e^{\sin x}\cos x\, dx + C\right) = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x} + C\right)$$

$$= \underline{1 + Ce^{-\sin x}}$$

Anta $y(0) = 0$: Da må $0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$

$\underline{y(x) = 1 - e^{-\sin x}}$

$(x^2y)' = \sin x \Rightarrow x^2 y = -\cos x + C$

$\underline{y = \frac{1}{x^2}(-\cos x + C)}$

Oppg 10.1.8: $x^2y' + 2xy = \sin x$

standard form: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}\sin x \qquad F(x) = 2\ln|x|$

$$y(x) = e^{-2\ln|x|}\left(\int e^{2\ln|x|}\frac{1}{x^2}\sin x\, dx + C\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int \sin x\, dx + C\right) = \underline{\frac{1}{x^2}(-\cos x + C)}$$

Eks. 10.2.2

$y(t)$ = befolkning ved tid t: vekstrate r, befolkningsvekst Ne^{at}/år pga innvandring.

$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx r\,y(t)\Delta t + Ne^{at}\Delta t$$

$$y'(t) = r\,y(t) + Ne^{at} \iff y'(t) - r\,y(t) = Ne^{at}$$

$$y(t) = e^{rt}\left(\int e^{-rt} N e^{at}\,dt + C\right)$$

$$= e^{rt}\left(\frac{N}{a-r}e^{(a-r)t} + C\right) = \underline{\frac{N}{a-r}e^{at} + Ce^{rt}}$$

den største av a og r bestemmer utviklingen i det lange løp

hvis $y(0) = B$: $\quad B = \frac{N}{a-r} + C \iff C = B - \frac{N}{a-r}$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{N}{a-r}e^{at} + \left(B - \frac{N}{a-r}\right)e^{rt}}}$$

Setning 10.3.1 Anta f, g kont. på I, $c \in I$, $d \in \mathbb{R}$.
Det finnes nøyaktig en løsning av $y' + f(x)y = g(x)$, $y(c) = d$
Denne er $y(x) = e^{-\int_c^x f(t)dt}\left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)ds} g(t)dt + d\right)$ **

Bevis: Anta vi har to løsninger, y_1, y_2:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)dx + C_1\right) \\ y_2(x) &= e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)dx + C_2\right) \end{aligned}\right\} \text{trekk fra}$$

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{-F(x)}(C_1 - C_2)$$

$x = c$: $y_1(c) - y_2(c) = d - d = 0 = e^{-F(c)}(C_1 - C_2) \Rightarrow C_1 = C_2$

$\Rightarrow y_1(x) = y_2(x)$ samme løsning.

** er løsning: $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ er spesielt en antiderivert til f

10.4 En diff. likning kalles separabel hvis den er på formen

$$q(y)\,y' = p(x) \qquad (p, q \text{ er kjente funksjoner})$$

Eks 10.4.1 $e^{-x} y' = (1+y^2) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{q(y)} y' = \underbrace{e^{x}}_{p(x)}$

$u = y$

Integrerer. $\int \frac{1}{1+y^2} y'\,dx = \int e^x\,dx$

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan y = e^x + C \Rightarrow \underline{\underline{y = \tan(e^x + C)}}$$

10.4.4 eks. Vekst i dyrepopulasjon med rate r

Antar også at N er øvre grense for hvor stor bestand det er ressurser for.

antar vekst i pop. er prop med $\underbrace{1 - \frac{y(t)}{N}}_{\text{liten når } y \text{ er nær } N}$

(negativ vekstrate for $y > N$)

Antar $y'(t) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{N}\right)$

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{N})} y'(t) = r \qquad \frac{1}{y(1-\frac{y}{N})} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-\frac{y}{N}}$$

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}\right) y'(t) = r$$

$$\ln|y| - \ln|N-y| = rt + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = rt + C \Rightarrow \frac{y}{N-y} = De^{rt}$$

$$\Rightarrow y = \frac{N}{1 + e^{-rt}/D} \qquad t \to \infty : y \to N$$