$y' + f(x)\,y = g(x)$

$y'\,f(y) = g(x)$

Differensialligninger
Seksjon 14.2 i komp.
Side 360

Ny notasjon. Vi skal løse ligningen

$$x' = f(t, x), \quad x(a) = x_0$$

Ukjent funksjon er $x(t)$

Geometrisk tolkning av differensialligningen.

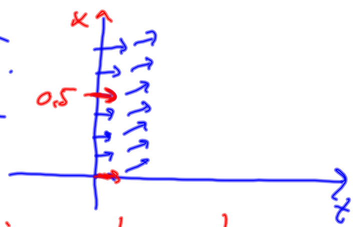
Eksempel $\boxed{x' = f(t, x)} = t, \quad x(0) = 0$

Dette forteller oss hva den deriverte til løsningen skal være.

For eksempel vil for $t = 0$ den deriverte være $x'(0) = 0$.

For $t = 0.1$, $x'(0.1) = 0.1$

$t = 0.5$, $x'(0.5) = 0.5$.



Løsningen for $t = 0$ er

$x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

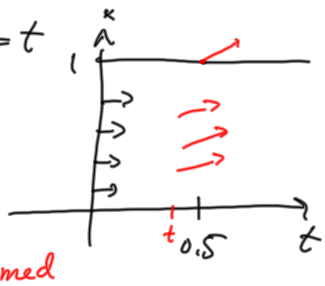
Men den samme ligningen kan ha andre startverdier, for eksempel $x(0) = 0.5$. Den deriverte er stadig gitt ved $x'(t) = f(t, x) = t$, altså

$x'(0) = 0$

Jeg kunne også hatt en startverdi

$x(0.5) = 1$, $\quad x' = f(t, x) = t$

$x'(0.5) = 0.5$



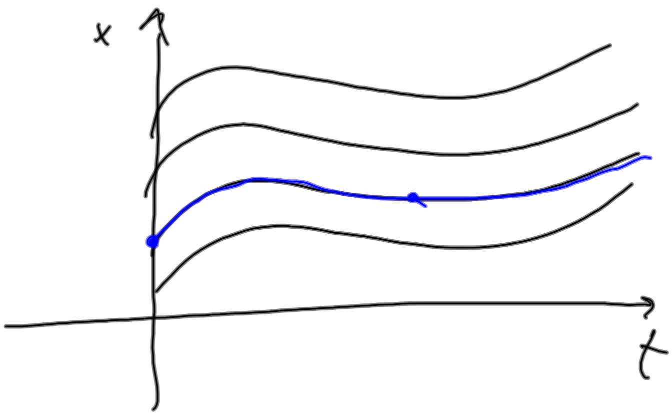
For hvert punkt (t_0, x_0) i planet kan vi tegne en tangent til løsningen av $x' = f(t, x) = t$ med $x(t_0) = x_0$ (til $x(t)$)

Tangent i $t = t_0$ er gitt ved $T(t) = x(t_0) + (t - t_0)\,x'(t_0)$

Siden $x(t_0) = x_0$ og $x'(t_0) = f(t_0, x_0) = t_0$

så er $T(t) = x_0 + (t - t_0) \cdot t_0$

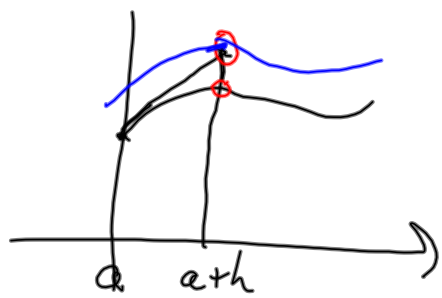
Observasjon. Ligningen $x' = f(t, x)$ beskriver en familie av funksjoner som har en tangent i (t, x) med stigningstall gitt ved $f(t, x)$.
Ved å legge til betingelsen $x(a) = x_0$ plukker vi ut en spesifikk løsning (eller løsningskurve).



Eulers metode:

Ide: Følg tangenten!

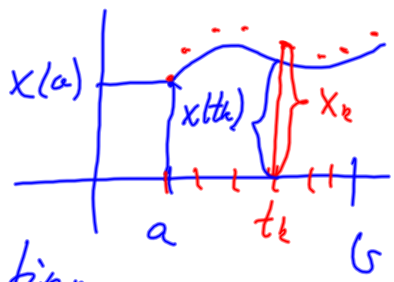
$x' = f(t, x)$



Numerisk løsning av en differensialligning:

Anta at $x' = f(t,x)$, $x(a) = x_0$ er gitt, sammen med et intervall $[a,b]$ der vi ønsker en løsning.

Når vi skal finne en numerisk løsning velger vi en sekvens av t-verdier $(t_k)_{k=0}^{n}$, $a=t_0$, $b=t_n$, og så ønsker vi å finne en tilnærming x_k til $x(t_k)$ for $k=0,1,\dots,n$.



Eulers metode: Ide: følg tangenten.

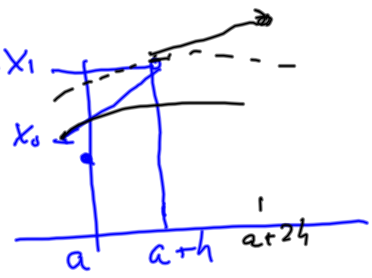
Ligningen er $x' = f(t,x)$, $x(a) = x_0$

Vi skal regne ut en tilnærming (t_k, x_k), $k=0,\dots,n$.

Vi antar at $t_{k+1} - t_k = h$.

Merk at vi kjenner løsningen i $t_0 = a$, $x(a) = x_0$.

For å finne x_1, følger vi $x(t_1) \approx x_1$ tangenten i $t_0 = a$:



Verdi av løsningen i $t=a$ er $x(a) = x_0$.

Derivert av løsningen i $t=a$ er $x'(a) = f(a, x(a)) = f(a, x_0) = x_0'$

Tangent i a: $T_0(t) = x(a) + (t-a)\,x'(a)$

$$= x_0 + (t-a)\,f(a, x_0)$$

Verdi av tangent i $t = t_1 = a+h$.

$$T_0(t_1) = T_0(a+h) = x_0 + h\,f(a, x_0)$$

Ide bak Eulers midtpunkt metode

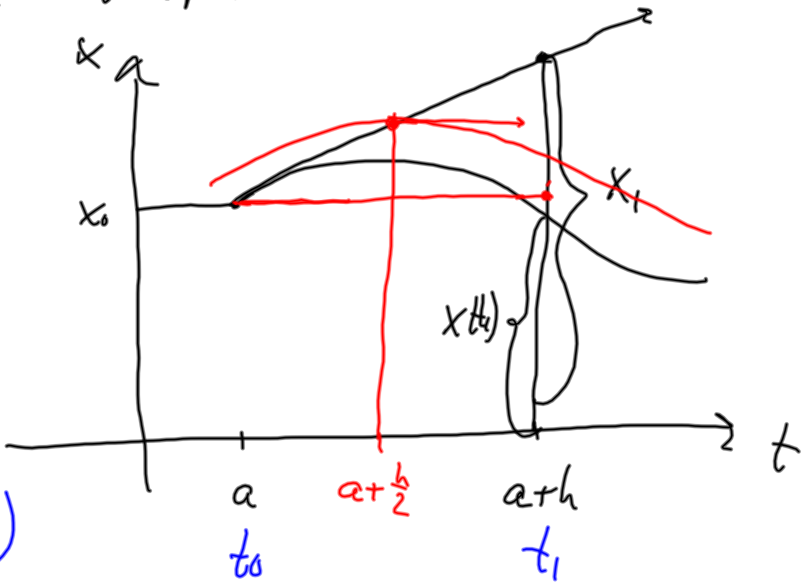
Formel:

$$x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0)$$

$$x_1 = x_0 + h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_{1/2}\right)$$

Euler:

$$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$$



Eksempel på Euler:

$x' = t^3 - 2x, \quad x(0) = 0.25$ $\quad = f(t,x)$

Skal finne tilnærmet løsning i 0.1, 0.2, 0.3...

Startverdi (0, 0.25).

Vi ser at $x_0' = x'(t_0) = x'(0) = f(0, x(0)) = f(0, 0.25)$

Tangenten er da $\quad = 0^3 - 2 \cdot 0.25 = -0.5$

$T_0(t) = x(0) + (t-0)\,x'(0) = 0.25 - t \cdot 0.5$

$T_0(0.1) = 0.25 - 0.1 \cdot 0.5 = 0.2 = x_1 \approx x(0.1)$

Alg.

$x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$