## Eulers metode  Kap. 14 i komp

$x_0 = x(t_0) = 1$

**Eks** $x' = t + x$, $x(1) = 1$, $t_0 = 1$, $h = 0.1$

Gå fra $t_0 = 1$ til $t_1 = 1.1$.

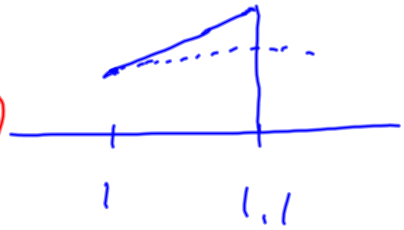
Vi har $x_0 = 1$ (tilnærming til løsning i $t_0$)

Bruker Euler

$x_1 = x_0 + h x_0'$ ,  $x_0' = t_0 + x_0 = 1 + 1 = 2$

$= 1 + 0.1 \cdot 2 = 1.2$

Kan regne ut $x_1' = t_1 + x_1 = 1.1 + 1.2 = 2.3$




Gå fra $t_1$ til $t_2 = t_1 + h$

$x_2 = x_1 + h x_1' = 1.2 + 0.1 \cdot 2.3 = 1.43$

$$x_{k+1} = x_k + h \underbrace{f(t_k, x_k)}_{t_k + x_k}$$

Taylormetoder: Deriver diff.lign.

$x' = t + x$     $t_0 = 1,\ x_0 = 1,\ x_0' =$

$x'' = 1 + x' = 1 + t + x$     $0.01 \cdot \frac{3}{2}$

$x_0'' = 1 + 1 + 1 = 3$ ,

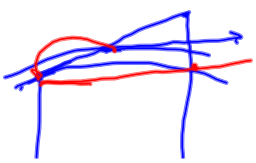
$\hat{x}_1 = x_0 + h x_0' + \frac{h^2}{2} x_0'' = 1 + 0.1 \cdot 2 + \frac{0.1^2}{2} \cdot 3$

$= 1 + 0.2 + 0.015$

$= 1.215$


Parabel fra Taylor

Euler midtpkt



# Systemer av differensialligninger

Eks. Ball som blir kastet:

I y-retning: $v_2' = \frac{c}{m} v_2^2 - g$ – gravitasjon

luftmotstand

I x-retning

$v_1' = -\frac{c}{m} v_1^2$

$v_2$ – hastighet i y-retning

$v_1$ – hastighet i x-retning

Totalt

$$v_1' = -\frac{c}{m}\left(v_1^2 + v_2^2\right), \qquad v_1(0) = v_{0x}$$

$$v_2' = \frac{c}{m} \cancel{v_2^2} - g \qquad v_2(0) = v_{0y}$$

$(v_1^2 + v_2^2)$

Ex 14.34

$$x' = x \cdot y + \cos z \,, \qquad x(0) = x_0$$
$$y' = 2 - t^2 + z^2 y \,, \qquad y(0) = y_0$$
$$z' = \sin t - x + y \,, \qquad z(0) = z_0$$

$x, y, z$ ukjente funksjoner som avh. av $t$.

Vi innfører vektornotasjon: $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), f_2(t, \bar{x}), f_3(t, \bar{x}))$

$$x' = f_1(t, \bar{x}) = f_1(t, x, y, z) = xy + \cos z$$
$$y' = f_2(t, \bar{x}) = f_2(t, x, y, z) = 2 - t^2 + z^2 y$$
$$z' = f_3(t, \bar{x}) = f_3(t, x, y, z) = \sin t - x + y$$

Da kan det opprinnelige systemet skrives

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Nå kan vi bruke Eulers metode:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

Skalar Euler:

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k)$$

Euler for systemet over, skrevet ut

$$x_{k+1} = x_k + h(x_k y_k + \cos z_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + h(2 - t_k^2 + z_k^2 y_k)$$
$$z_{k+1} = z_k + h(\sin t_k - x_k + y_k)$$

Bedre og la den ukjente vektoren være $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_M)$

Da blir Euler

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\,\bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

Men første komponent blir

$$x_1^{k+1} = x_1^{k+1} + h\,f_1(t_k, x_1^k, \ldots, x_M^k)$$

Hva med ligninger av høyere orden?

Eks $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

Innfør $x_2 = x'$, da er $x_2' = x''$

Da blir ligningen

$$x_2' = t^2 + \sin(x + x_2), \quad x(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

Sett i tillegg $x_1 = x$, så får vi

$$x_1' = x_2, \quad x_1(0) = 1$$
$$x_2' = t^2 + \sin(x_1 + x_2), \quad x_2(0) = 0$$

Feilanalyse for Eulers metode

Minner om middelverdisetningen:

$$g(t_2) - g(t_1) = g'(\xi)(t_2 - t_1)$$

På samme måte, hvis $g$ er en funk av to variable:

$$g(t, x_2) - g(t, x_1) = g_x(t, \xi)(x_2 - x_1)$$

der $g_x$ angir derivasjon m.h.p $x$.

Ex. $g(t,x) = t^2 + x$

$g_x(t,x) = 1$

Generelt steg med Euler: $x' = f(t, x)$

(*) $x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k, x_k)$

$x_k$ er en tilnærming til $x(t_k)$, $t_{k+1} - t_k = h$.

Med eksakt Taylor-utvikling har vi

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + h\, x'(t_k) + \frac{h^2}{2} x''(\xi_k), \quad \xi_k \in (t_k, t_{k+1})$$

Subtraksjon av (*) gir $\qquad t_{k+1} = t_k + h$

$$x(t_{k+1}) - x_{k+1} = x(t_k) - x_k + h\big(f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k)\big) + \frac{h^2}{2} x''(\xi_k)$$

Merk at $f(t_k, x(t_k)) - f(t_k, x_k) = f_x(t_k, \theta_k)(x(t_k) - x_k)$

$$= x(t_k) - x_k + h\, f_x(t_k, \theta_k)(x(t_k) - x_k) + \frac{h^2}{2} x''(\xi_k)$$

$$= \big(1 + h\, f_x(t_k, \theta_k)\big)(x(t_k) - x_k) + \frac{h^2}{2} x''(\xi_k)$$

Sett $\varepsilon_k = x(t_k) - x_k$. Da har vi

$$\varepsilon_{k+1} = \big(1 + h\, f_x(t_k, \theta_k)\big)\varepsilon_k + \frac{h^2}{2} x''(\xi_k)$$

$\vdots$

$$|\varepsilon_{k+1}| \le h\, D\, \frac{(1+hC)^{k+1} - 1}{2C}, \qquad C = \max_t |x''(t)|$$

$$D = \max_t |f_x(t, x(t))|$$

$$\le h\, \frac{D}{2C}\left(e^{(t_k - a)C} - 1\right), \quad \text{når } t_0 = a$$

Eulers metode er ~~av~~ orden 1

(feilen går mot 0 med $h^1$)