2 orders differensialligninger

Generell ligning:

$$y'' = F(x, y, y'), \qquad y(a) = y_0, \; y'(a) = y_0'$$

Ex: $y'' = x^2 + \sin(y + y'^2)$

Vi skal se på en veldig spesiell klasse av slike ligninger,

nemlig $\quad y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

der $f(x)$ er en gitt funksjon

Ex. $\quad y'' + 2y' - 5y = 8x$

Vi skal ~~først~~ se på til fellet der $f(x) = 0$,

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (*)$$

homogen ligning

Skal finne $y(x)$ slik at $(*)$ holder

Lemma 10.5.1 Anta at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ (se kapittel 10.5 i Kalkulus)

er to løsninger av

$$y'' + Py' + qy = 0$$

Da er også

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

en løsning for alle mulige valg av $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Bevis: Siden y_1 og y_2 er løsninger har vi

$$y_1'' + Py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + Py_2' + qy_2 = 0$$

Vi skal vise at $y'' + Py' + qy = 0$

$$y'' + Py' + qy = C_1y_1'' + C_2y_2'' + P(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2)$$

$$= C_1(y_1'' + Py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + Py_2' + qy_2)$$

$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

Hvordan finne en løsning?

Ligningen $y' + by = 0$ har løsningen

$$y(x) = Ce^{-bx}$$

For ligningen $y'' + py' + qy = 0$

prøver vi med en løsning på samme form,

$y(x) = e^{rx}$ der r er et tall vi skal bestemme

$y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2 e^{rx}$. Setter inn

$$y'' + py' + qy = r^2 e^{rx} + p\,r e^{rx} + q e^{rx}$$
$$= e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

Hvis r løser 2. grads ligningen

$$z^2 + pz + q = 0$$

vil e^{rx} være en løsning av

$$y'' + py' + qy = 0$$

Vanligvis får vi to løsninger på denne måten, $e^{r_1 x}$ og $e^{r_2 x}$.

Da vil og så $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

være en løsning for alle valg av C_1 og C_2

Må behandle tre tilfeller:

(i) $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $r_1 = r_2$

(iii) , $r_1 \in \mathbb{C}$, $r_2 = \overline{r_1}$

Ex. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Kar. lign. $z^2 + z - 2 = 0$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$r_1 = 1$, $r_2 = -2$.

Gen løsn $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

$y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$

Startverdier: $1 = y(0) = C_1 + C_2$

$0 = y'(0) = C_1 - 2C_2$

Dette gir $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = \frac{1}{3}$

Løsning: $y(x) = \frac{2}{3} e^x + \frac{1}{3} e^{-2x}$

Setning 16.5.3.

Hvis $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ er alle løsninger av $y'' + py' + qy = 0$ på formen $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

Tilfellet der $r_1 = r_2 = r$

I dette tilfellet er alle løsninger på formen

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

Bevis:

Siden $r_1 = r_2 = r$ er det kar. pol.

$$(z-r)(z-r) = z^2 - 2rz + r^2 = z^2 + pz + q$$

Så $p = -2r$, $q = r^2$.

Anta at y er en løsning, vi må vise at da er $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Vi innfører funksjonen $u(x) = y(x)/e^{rx}$.

Da er $y(x) = u(x) e^{rx}$ så

$$y'(x) = u' e^{rx} + u r e^{rx}$$

$$y''(x) = u'' e^{rx} + u' r e^{rx} + u' r e^{rx} + u r^2 e^{rx}$$

$$= u'' e^{rx} + 2u' r e^{rx} + u r^2 e^{rx}$$

Siden y er en løsning har vi

$$0 = y'' + py' + qy$$
$$= \underline{u''e^{rx}} + \underline{2u're^{rx}} + r^2ue^{rx}$$
$$+ p(u'e^{rx} + rue^{rx}) + que^{rx}$$
$$= u''e^{rx} + (2re^{rx} + pe^{rx})u' + (r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx})u$$
$$= e^{rx}\left(u'' + (2r+p)u' + \underbrace{(r^2 + pr + q)u}\right).$$

Husk at $p = -2r$ så vi har $=0$

$$0 = y'' + py' + qy = e^{rx} \cdot u''$$

Men da må $u'' = 0$

Vi integrer og får $u' = C_1$

Integrerer igjen og får $u = C_1x + C_2$

Men $y = ue^{rx} = (C_1x + C_2)e^{rx}$ som vi skulle vise

Ex. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Kar. lign. $z^2 - 4z + 4 = 0$

$$z = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2, \quad r = 2$$

Gen løsn. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

(iii) To komplekse konj. røtter

Siden $r_2 = \overline{r_1}$ har vi

$r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$ for

passende reelle tall a, b.

Sett $r = a + ib$

Da er løsningen $y(x) = E e^{rx} + F e^{\bar{r}x}$

Her må vi tillate at E og F er komplekse,

hvis ikke får vi garantert kompleks løsning

Vi må ha $F = \overline{E}$, det gir reell løsning.

Da er $y(x) = E e^{rx} + \overline{E} e^{\bar{r}x}$

reell siden $y(x) = \overline{y(x)}$

Eksplisitt sjekk av at $y(x)$ er reell:

$$y(x) = E e^{rx} + \bar{E} e^{\bar{r} x}$$

$$E = A + iB \,, \quad r = a + ib \,, \quad A, B, a, b \in \mathbb{R}$$

$$e^{rx} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$y(x) = (A+iB)\, e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$+ (A-iB)\, e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

$$= (2A \cos bx + 2 i^2 B \sin bx)\, e^{ax}$$

$$= (2A \cos bx - 2B \sin bx)\, e^{ax}$$

$$= e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx) \,, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Inhomogene ligninger: Seksjon 10.6.

$$y'' + Py' + qy = h(x) \qquad (*)$$

Lemma 10.6.1 Anta at y_p er en løsning av $(*)$. Da er enhver annen løsning på formen $y = y_p + y_h$

der y_h er en løsning av den homogene ligningen $y'' + Py' + qy = 0$

Hvordan finne en partikulær løsning?
Den er nå samme form som høyresiden $h(x)$.

<u>Ex.</u> $y'' + y' - 2y = 2x$

Høyre side 1. grads pol. i x. Prøver med

$y_p(x) = A + Bx$ – gen. 1. grads pol.

$y_p' = B$, $y_p'' = 0$

Vi setter inn.

$$2x = y_p'' + y_p' - 2y_p = 0 + B - 2(A + Bx)$$
$$= B - 2A - 2Bx$$

Skal dette være likt <u>for alle</u> x

må koeffisientene på hver side være like

$B - 2A = 0$, $2 = -2B$, $B = -1$

$-1 = 2A$, $A = -\frac{1}{2}$

Partikulær løsning $y_p = A + Bx = -\frac{1}{2} - x$

Hvis dette ikke funker, øk. graden.

Regel 2. Hvis $h(x) = a^x P(x)$, $a \geq 0$ og P polynom.

Prøv med $y_p(x) = a^x Q(x)$ der Q er polynom av samme grad som P

Regel 3. Hvis $h(x) = a^x (A \cos bx + B \sin bx)$, $a \geq 0$

prøv med $y_p(x) = a^x (C \cos bx + D \sin bx)$, $C, D \in \mathbb{R}$