Aritmetisk koding

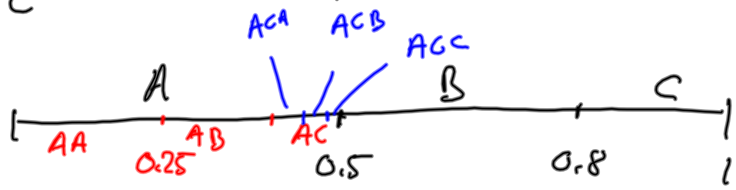
Seksjon 7.4.

Ex. 7.21. $X = ACBBCAABAA$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$

A skal assosieres med et intervall av bredde 0.5

B skal ass - - - -, bredde 0.3

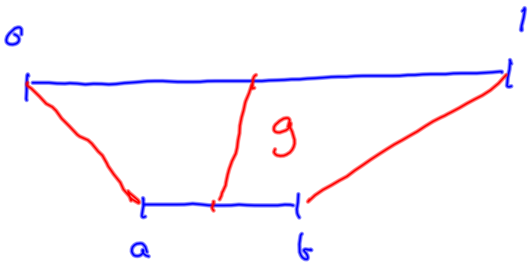
C – ——— " " ——— 0.2



Første tegn er A så vi skal være i $[0, 0.5]$. Dette deles på samme måte

Observasjon 7.18. La $[a,b]$ være et intervall med $a < b$. Funksjonen $\boxed{g(z) = a + z(b-a)}$ avbilder ethvert tall i $[0,1]$ til intervallet $[a,b]$. Spesielt så er

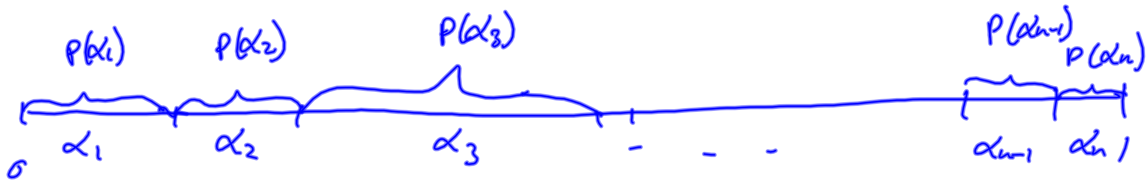
$$g(0) = a, \quad g(1/2) = \frac{a+b}{2}, \quad g(1) = b$$



Algoritme for aritmetisk koding.

Vi har tekst $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ hvor x_i er hentet fra $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ med sannsynligh. $P(\alpha_1)$ $P(\alpha_2)$ ... $P(\alpha_n)$

Vi skal assosiere α_i med et delintervall av $[0,1]$ med bredde $P(\alpha_i)$.



Vi innfører notasjonen

$$F(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{j} P(\alpha_i), \qquad L(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(\alpha_i) = F(\alpha_j) - P(\alpha_j)$$

Alg.

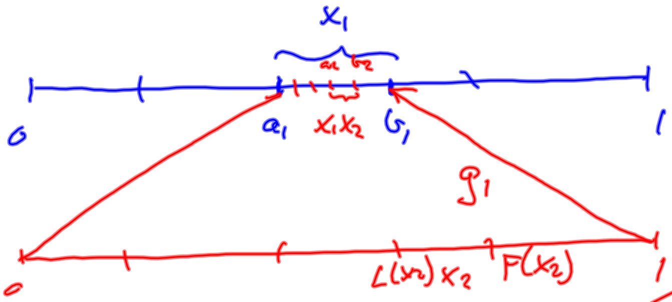
Hvis $x_1 = \alpha_i$ så skal vi starte med intervallet til α_i, dvs $[a_1, b_1]$. der

$$a_1 = P(\alpha_1) + \ldots + P(\alpha_{i-1}) = L(\alpha_i) = L(x_1)$$

$$b_1 = P(\alpha_1) + \ldots + P(\alpha_{i-1}) + P(\alpha_i) = F(\alpha_i) = F(x_1)$$

Hva blir nå neste delintervall?

Neste tegn er x_2, la oss si α_k. Dette tegnet hører til intervallet $[L(x_2), F(x_2)) = [L(\alpha_k), F(\alpha_k))$



Trykker $[0,1]$ inn på $[a_1, b_1]$ ved hj. av

$$g_1(z) = a_1 + z(b_1 - a_1)$$

Da havner $[L(x_2), F(x_2)]$ i intervallet

$$[a_2, b_2] = [g_1(L(x_2)), g_1(F(x_2))]$$

Vi ser at

$$a_2 = g_1(L(x_2)) = a_1 + L(x_2)(b_1 - a_1)$$

$$b_2 = g_1(F(x_2)) = a_1 + F(x_2)(b_1 - a_1)$$

Algoritme 7.20.

1. Sett $[a_0, b_0] = [0, 1]$

2. For $k = 1, 2, \ldots, m$

   (a) Definer $q_k(z) = a_{k-1} + z(b_{k-1} - a_{k-1})$

   (b) Sett $[a_k, b_k] = [q_k(L(x_k)), q_k(F(x_k))]$

Den aritmetiske koden til teksten x er midtpunktet $C(x)$ i $[a_m, b_m]$, trunkert til

$$\lceil -\log_2(P(x_1)\cdots P(x_m))\rceil + 1$$

binære sifre.

Egenskaper ved aritmetisk koding 7.4.3

Thm. Bredden av $[a_m, b_m]$ er

$$b_m - a_m = P(x_1)\, P(x_2) \cdots P(x_m) \qquad (*)$$

og den aritmetiske koden ligger i $[a_m, b_m]$

Bevis. Bevis for $(*)$ ved induksjon.

Når $m=1$ så er $b_1 - a_1 = F(x_1) - L(x_1) = P(x_1)$

Anta ok for $k-1$, d.v.s:

$$b_{k-1} - a_{k-1} = P(x_1)\, P(x_2) \cdots P(x_{k-1}).$$

Hva da med $b_k - a_k$?

$$b_k - a_k = g_k(F(x_k)) - g_k(L(x_k))$$

$$= (F(x_k) - L(x_k))(b_{k-1} - a_{k-1}) = P(x_k)\, P(x_{k-1}) \cdots P(x_1). \text{ Ok}$$

Må også vise at den aritmetiske koden havner i intervallet $[a_m, b_m]$.

Definer μ ved relasjonen $\frac{1}{2^\mu} = b_m - a_m = P(x_1) \cdots P(x_m)$

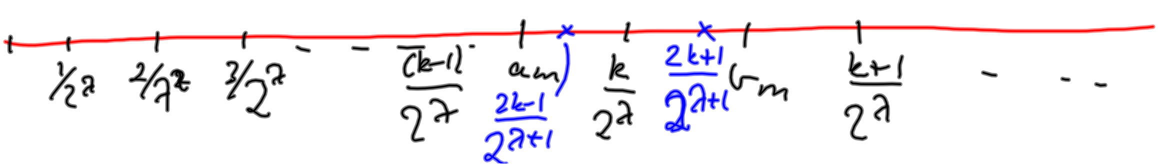
Vanlig vis er ikke μ et heltall så vi setter $\lambda = \lceil \mu \rceil$.

$\lceil 100.1 \rceil = 101$

$\lfloor 100.9 \rfloor = 100$

$$\boxed{\text{Dette betyr at } \frac{1}{2^\lambda} \text{ er mindre enn } b_m - a_m}$$

Se på tallene $i/2^\lambda$, $i = 1, 2, \ldots, 2^\lambda$



Aritmetisk koding er optimalt (for lange tekster).

Minner om at

$$\log_2 (P(x_1) \cdots P(x_m)) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \log_2 P(\alpha_i)$$

La oss se på antall bit pr. tegn for aritmetisk koding:

$$\frac{1}{m}\left(\left\lceil -\log_2 (P(x_1) P(x_2) \cdots P(x_m)) \right\rceil + 1\right)$$

$$\leq -\frac{1}{m} \log_2 (P(x_1) P(x_2) \cdots P(x_m)) + \frac{2}{m}$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \log_2 P(\alpha_i) + \frac{2}{m}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f(\alpha_i)}{m} \log_2 P(\alpha_i) + \frac{2}{m}$$

$$\approx -\sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i) \log_2 P(\alpha_i)$$

$$= H(p_1, \ldots, p_n)$$