Inhomogene differensligninger

I går: $x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n)$ (*)

Løsning: $x_n = x_n^h + x_n^p$

x_n^h - generell løsn. av homogen ligning

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$$

x_n^p - én løsning av (*)

Eks: Penger i banken: Vi har 100 000 i banken til 6 % rente. Vi tar ut kr. 5000 pr. år. Hvordan utvikler pengene seg?

La x_n være beløp etter n år.

$$x_{n+1} = 1.06\, x_n - 5 \qquad (\text{måler i } 1000 \text{ kr.})$$

$$x_0 = 100$$

Differens lign:

$$x_{n+1} - 1.06\, x_n = -5$$

Generell løsning av homogen ligning

$$x_{n+1} - 1.06\, x_n = 0$$

er $x_n^h = C\, 1.06^n$

Må ha en løsning av $x_{n+1} - 1.06\, x_n = -5$

Prøver med løsning $x_n^p = A$. Setter inn.

$$-5 = x_{n+1}^p - 1.06\, x_n^p = A - 1.06 A$$

eller $0.06 A = 5$, $A = \frac{250}{3} \approx 83.3$

Generell løsn.

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(1.06)^n + \frac{250}{3}$$

Dessuten er $x_0 = 100$ så

$$100 = x_0 = C + \frac{250}{3} \quad \text{,} \quad C = 100 - \frac{250}{3} = \frac{50}{3}$$

$$x_n = \frac{50}{3}(1.06)^n + \frac{250}{3}$$

Vi ser at $x_{10} = \frac{50}{3}(1.06)^{10} + \frac{250}{3} \approx 113$

Hvis vi ikke tar ut penger har vi 179 etter 10 år.

x_n : $x(n)$

$x_n = An + B$

$x_{n+1} = A(n+1) + B$

$x_n = A$

$x_{n+1} = A$

$x_0 = A$

Eks: $X_{n+1} - 2X_n = 2^n$

Homogen Ligning: $X_{n+1} - 2X_n = 0$

Dermed er $X_n^h = C \cdot 2^n$.

Finn en $\{X_n^P\}$.

Prøv med $X_n^P = A \cdot 2^n$

$$2^n = X_{n+1}^P - 2X_n^P = A \cdot 2^{n+1} - 2A \cdot 2^n$$
$$= A \cdot 2^{n+1} - A \cdot 2^{n+1} = 0$$

$f(n) = P(n)\, a^n$ der P er polynom. Prøv med $Q(n)\, a^n$ er Q er polynom av samme grad som P.

Siden $A \cdot 2^n$ er en løsning av den homogene ligningen får vi problemer. Vi må øke graden. Vi prøver med $X_n^P = (An + B)2^n$

$$2^n = X_{n+1}^P - 2X_n^P = (A(n+1) + B)2^{n+1} - 2(An + B)2^n$$
$$= 2^{n+1}(\cancel{An} + A + \cancel{B} - \cancel{An} - \cancel{B}) = 2^{n+1}(A)$$

Skal dette holde for alle n må $A = \frac{1}{2}$

B kan være hva som helst, setter $B = 0$

Så $X_n^P = (An + B)2^n =$

$$= \left(\frac{1}{2}n + 0\right)2^n = n \cdot 2^{n-1}$$

Generell løsn:

$$X_n = X_n^h + X_n^P = C \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}$$

sep 19-10:37

$$x_{n+3} + b x_{n+2} + c x_{n+1} + d x_n = g(n)$$

$x_n = r^n \Rightarrow$ i homogen lign:

$$r^3 + br^2 + cr + d = 0$$

Numerisk simulering av differensligning.

Hvis vi har ligningen

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

er $\quad x_{n+2} = f(n) - b x_{n+1} - c x_n$

Kjenner vi x_0 og x_1 kan vi regne ut $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$

sep 19-10:58

Differensligninger:

1. ordens differensligning: $\to x_n = x_0 \cdot c^n$

$$x_{n+1} = c\,x_n \,, \quad x_0 = a.$$

Eks.: $x_{n+1} = 1.06\, x_n \,, \quad x_0 = 100$

$$x_1 = 1.06 \cdot x_0 = 106$$

$$x_2 = 1.06 \cdot x_1 = 1.06 \cdot 106 = 100 \cdot 1.06^2$$

$$\vdots$$

$$x_n = 100 \cdot 1.06^n.$$

2. orden: $x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$

$$x_{n+2} = -b\,x_{n+1} - c\,x_n \,, \quad x_0 = a_0,\ x_1 = a_1$$

$$x_2 = -b\,a_1 - c\,a_0$$

$$x_3 = -b\,x_2 - c\,x_1 = -b(-b a_1 - c a_0) - c \cdot a_1$$

$$x_4 = \ldots$$

Prøv med $x_n = r^n$, der r er ukjent.

Da må $r^2 + br + c = 0$

Inhomogen lign:

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n)$$

For å løse:

i) Finn generell løsn av $x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$ $\quad x_n^h$

ii) Finn én løsn av $x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n)$ $\quad x_n^p$

Da er generell løsn av inhomogen lign: $x_n = x_n^h + x_n^p$

Generelle differensligninger:

2. ordens inhomogene:

$$x_{n+2} = -b x_{n+1} - c x_n + f(n)$$

Gitt x_0 og x_1 så kan vi sette inn og regne ut $x_2, x_3, x_4, \ldots$

Generell 2. ordens ligning:

$$x_{n+2} = F(n, x_{n+1}, x_n)$$

Ex1: $F(n, x_{n+1}, x_n) = -b x_{n+1} - c x_n + n$

$\rightarrow$ svarer til $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = n$

Ex2: $F(n, x_{n+1}, x_n) = 5 x_{n+1}^3 - \sin x_n$

svarer til $x_{n+2} - 5 x_{n+1}^3 + \sin x_n = 0$

Les mer i seksjon 6.1 og 6.2 i komp.

sep 19-11:31

Program for å simulere
2. ordens differens ligning

$$x_{n+2} = g(n) + f_0(n)x_n + f_1(n)x_{n+1}, \quad x_0 = a_0, \; x_1 = a_1$$

Algoritme:

$x_0 = a_0$

$x_1 = a_1$

for $i = 2, 3, \ldots, N$

$x_i = g(i-2) + f_0(i-2)x_{i-2} + f_1(i-2)x_{i-1}$

Print x_i

Plass økonomisering:

$x_{pp} = a_0$

$x_p = a_1$

for $i = 2, 3, \ldots, N$

$x = g(i-2) + f_0(i-2)x_{pp} + f_1(i-2)x_p$

Print x

$x_{pp} = x_p$

$x_p = x$

Eks på simulering:

Lign:

$$\cancel{x_{n+2} - \frac{2}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = 0,}$$

$$x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 8/3$$

Løsn. $x_n = 3 - 3^{-n}$

sep 19-11:56