Polynom interpolasjon.

Et Taylorpolynom er basert på informasjon om en funksjon i ett punkt (funksjonsverdi og derivater):

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Det betyr at $T_n f$ er en god tilnærming til f 'nær' a.

Hvorfor ikke tvinge polynomet til å matche f i punkter spredt i et intervall?

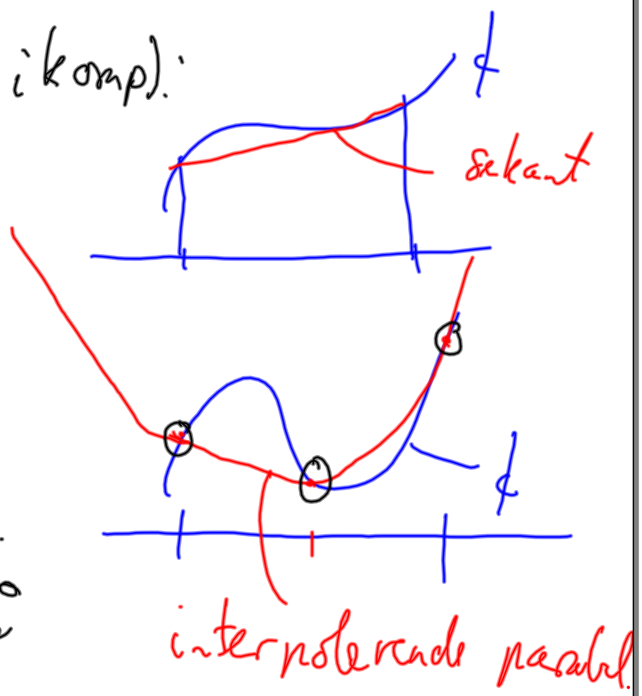
Generalisering av sekanten.

Interpolasjonsproblemet: (9.11 i komp):

La f være gitt og definert på $[a,b]$, og la $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ være $n+1$ forskjellige tall i $[a,b]$.

Interpolasjonsproblemet er å finne et polynom p_n av grad n slik at

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots n.$$



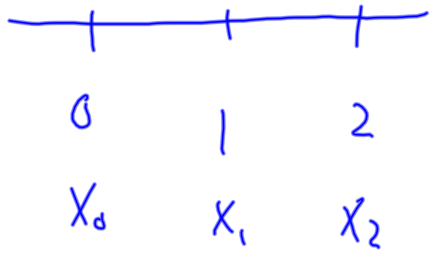
okt 2-10:31

Eks: Anta at $n=2$ og at

$x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2$. Dessuten

$f(x_0)=1,\ f(x_1)=3,\ f(x_2)=2$

Finn parabel P_2 slik at



$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x_0)&=P_2(0)=f(0)=1\\ P_2(x_1)&=P_2(1)=f(1)=3\\ P_2(x_2)&=P_2(2)=f(2)=2 \end{aligned}}$$

Finn P_2!

Skriv P_2 som $P_2(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)\cdot(x-x_1)$

Vi finner c_0, c_1, c_2 fra betingelsene over: $\quad =c_0+c_1x+c_2x(x-1)$

$$1=f(0)=P_2(0)=c_0, \qquad c_0=1$$

$$3=f(1)=P_2(1)=c_0+c_1=1+c_1, \quad c_1=3-1=2$$

$$2=f(2)=P_2(2)=c_0+2c_1+c_2\cdot 2\cdot 1=1+2\cdot 2+2c_2$$

$$2c_2=2-5=-3$$

$$c_2=-\frac{3}{2}$$

$$P_2(x)=1+2x-\frac{3}{2}x(x-1)$$

Newton-formen til interpolasjonspol.

La $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ være $n+1$ forskjellige tall.

Da er Newton formen til et polynom av grad n gitt ved

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Ex: $n=4$:

$$P_4(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + c_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

okt 2-10:53

Nå skal vi bruke Newton formen

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

og bestemme $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ slik at

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i), \quad i=0,1,2,\dots n}$$

$f(x_0) = P_n(x_0) = c_0$

$f(x_1) = P_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$

Vi vil ha en formel for c_k, $k=0,1,2,\dots,n$

Vi kan skrive

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$c_0 = f[x_0]$

$c_1 = f[x_0, x_1]$

siden vi vet at c_k bare avhenger av $x_0, x_1, \dots, x_k$ (og f).

Formel for koeffisientene

$f[x_0, \ldots, x_k]$ tilfredstiller formelen

$$(c_k =)\ \boxed{f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad k > 0}$$

$$\boxed{f[x_0] = f(x_0), \quad k = 0}$$

$\Rightarrow$ dividert differanse

okt 2-11:34

Dividert differanse tabell

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) = f[x_0] \; c_0 & & & & \\
x_1 & f(x_1) = f[x_1] & \rightarrow f[x_0, x_1] \; c_1 & & & \\
x_2 & f(x_2) = f[x_2] & \rightarrow f[x_1, x_2] & \rightarrow f[x_0, x_1, x_2] \; c_2 & & \\
x_3 & f(x_3) = f[x_3] & \rightarrow f[x_2, x_3] & \rightarrow f[x_1, x_2, x_3] & \rightarrow f[x_0, x_1, x_2, x_3] \; c_3 & \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$ fra forrige slide.

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$$

okt 2-11:41

Eksempel: Gitt data

9.21

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	2

Bestem interpolasjonspol:

x	$f(x)$			
0	0			
1	1	1		
2	1	0	$-\frac{1}{2}$	
3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Derfor

$$P_3(x) = 0 + 1(x-x_0) - \frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{1}{3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= x - \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

okt 2-11:57