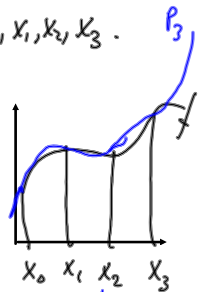
Polynominterpolasjon

Problem: Gitt funksjon f og x_0, x_1, x_2, x_3.
Finn kubisk polynom P_3 slik at
$$P_3(x_i) = f(x_i), \; i = 0,1,2,3$$



1. Skriv P_3 som
$$P_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Newton-form

2. $c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $k = 0,1,2,3$

3. $$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad k \geq 0$$
$f[x_0] = f(x_0)$

4. Dividert differanse tabell.

		c_1	c_2	c_3
x_0	$f(x_0) = f[x_0]$			
x_1	$f(x_1) = f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2) = f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3) = f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Merk at $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$

der $c \in (\min x_i, \max x_i)$

okt 3-10:15

Nullpunkter for funksjoner

Noen ganger kan vi finne nullpkt ved formel

$$2x+3=0, \quad x=-3/2$$

$$x^2+px+q=0 \Rightarrow x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Det fins også formler for å finne nullpunkter i 3. og 4. grads polyn.

okt 3-10:51

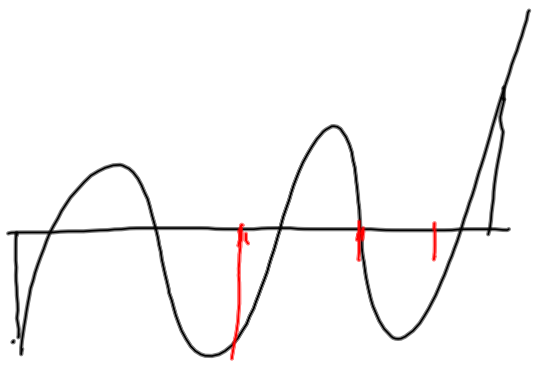
Halveringsmetoden

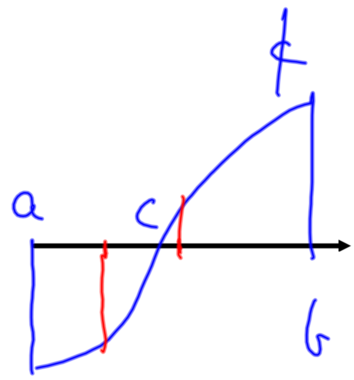
Kap 10 i komp.

Denne metoden er basert på skjæringssetningen

Anta at f er kontinuerlig på $[a,b]$ og at $f(a) \cdot f(b) < 0$ (motsatt fortegn i a og b).

Da fins det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$





Algoritme 16.2.

Gitt f, a og b slik at $f(a)f(b) < 0$,

og $N \in \mathbb{N}$

$a_0 = a$; $b_0 = b$;

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$m_{i-1} = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$

if $f(m_{i-1}) == 0$

$a_i = b_i = m_{i-1}$;

if $f(a_{i-1}) f(m_{i-1}) < 0$

$a_i = a_{i-1}$;

$b_i = m_{i-1}$

else

$a_i = m_{i-1}$;

$b_i = b_{i-1}$;

$[a_0, b_0]$

$\downarrow$

$[a_1, b_1]$ $\qquad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$

$\downarrow$

$[a_2, b_2]$

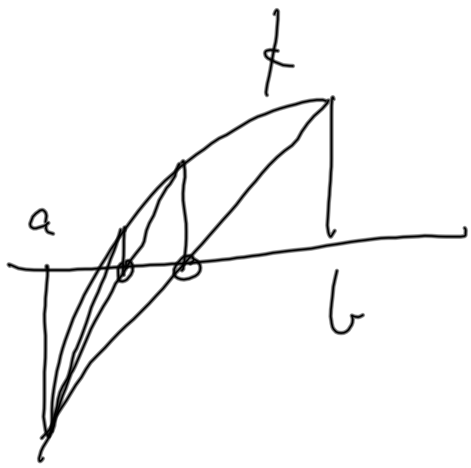
$\downarrow$

$$(b_i - a_i) \le \frac{1}{2}(b_{i-1} - a_{i-1}) \le \frac{1}{2^i}(b_0 - a_0)$$

Sekantmetoden

Gitt f og a, b, tilnærm f med sekanten basert i a og b og bruk nullpunktet til sekanten som tilnærming til nullpunkt til f

Litt mer detaljert:



sekant i a og b:

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$s(x) = 0$ gir

$$x = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b)$$

Algoritme: La x_0 og x_1 være gitt

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}-x_{i-2}}{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})} f(x_{i-1}), \quad i=2,3,\dots,N$$

Newtons metode

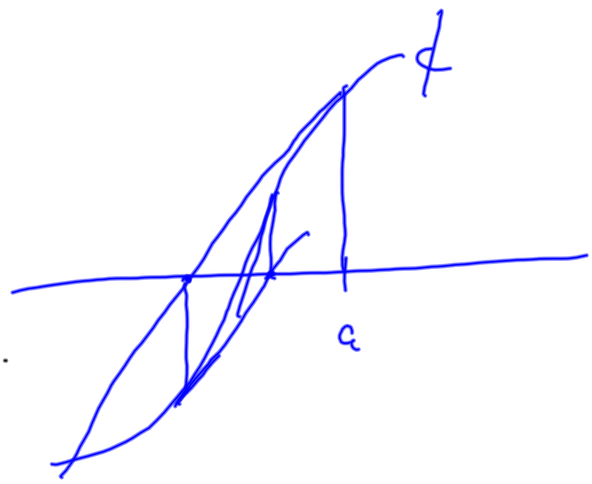
Ide: Tilnærm f med tangenten i et gitt punkt a og bruk nullpunktet til tangenten som tilnærming til nullpunktet til f.

Formel for tangenten

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$T(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = a - f(a)/f'(a)$$



Algoritme: Gitt f og x_0,

$$x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1})/f'(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$