Fra sist: Definerte metoder for å finne nullpunkter til funksjoner: Halveringsmetoden
Sekantmetoden
Newtons metode

1. Når fungerer metodene?

Halveringsmetoden: (fungerer alltid)

Teorem 10.4: Anta f har kun ett nullpunkt c i $[a,b]$, og la m_i være midtpunktene vi får med halveringsmetoden. Da er $|c - m_N| \leq \frac{b-a}{2^{N+1}}$

(følger av at c og m_N ligger innenfor samme intervall av lengde $\frac{b-a}{2^N}$, og siden m_N er midtpunktet så vil $|c - m_N| \leq \frac{b-a}{2^{N+1}}$

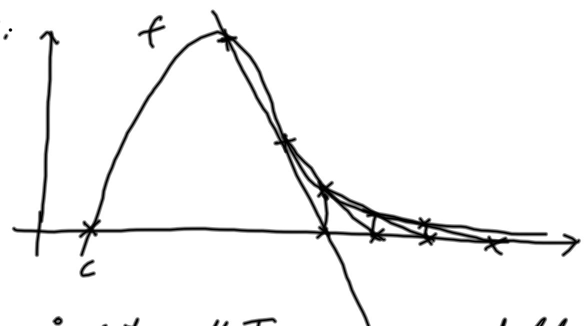
absolutte feil i teller

Relativ feil: $\left|\frac{c - m_N}{c}\right| \approx \left|\frac{c - m_N}{m_N}\right| \leq \frac{b-a}{|m_N| 2^{N+1}}$

problem: vet ikke c.

relativ feil $\leq \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{|m_N| 2^{N+1}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{\frac{b-a}{2^{N+1}} \leq \varepsilon |m_N|}$

vil bruke denne som stoppkriterium i implementasjon av halveringsmetoden sekantmetoden: fungerer ikke alltid:



Teorem 10.14 Anta f, f', f'' kont. på intervall I, som inneholder et nullpunkt c for f, og anta at det finnes en γ, slik at $|f'(x)| \geq \gamma > 0$ på I. Dat finnes en K s.a. for alle startpunkter x_0, x_1 tilstrekkelig nær c, så vil sekantmetoden konvergere mot c, med abs. feil $e_n = c - x_n$ slik at $|e_n| \leq K|e_{n-1}|^r$, der $r = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618\ldots$

Vi beviser ikke denne ☺

Newtons metode fungerer heller ikke alltid (samme eksempel som over)

Teorem 10.20

Med samme betingelser som i teorem 10.14 vil vi ha at Newtons metode konvergerer for alle startpunkter nær nok c, og $|e_{n+1}| \le K|e_n|^2$, der $e_n = x_n - c$ for en K.

Bevises ved hjelp av lemma 10.19, som sier at

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$$ for en ξ_n mellom x_n og c

(Vi har at $|f'(x_n)| \ge \gamma \Rightarrow \frac{1}{|f'(x_n)|} \le \frac{1}{\gamma}$

$$\Rightarrow \left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\right| \le \frac{|f''(\xi_n)|}{2\gamma} \le K$$

Bevis: Newtons metode sier at $x_{n+1} - c = x_n - c - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\Rightarrow e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$$

Taylors formel: $\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(c)}} = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(c - x_n)^2$

(om x_n) regnet ut i c: e_n

$$(x_n - c)f'(x_n) - f(x_n) = \frac{f''(\xi_n)}{2}(c - x_n)^2$$

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{f''(\xi_n)}{2} e_n^2$$

Tolkning av $\begin{cases} |e_{n+1}| \le K|e_n|^{1.618\ldots} & \text{(sekant)} \\ |e_{n+1}| \le K|e_n|^2 & \text{(Newton)} \end{cases}$

antar at $K \approx 1$, og at $e_n \approx 10^{-k}$ (dvs vi har k riktige 10-tallssiffer.

$$|e_{n+1}| \le 1 \cdot (\underbrace{10^{-k}}_{e_n})^r = 10^{-kr}$$ (dvs vi har nå kr riktige 10-tallssiffer.

$$k \to kr = k + \underbrace{(r-1)}_{\text{andel økning}} k$$ i antall siffre.

Konklusjon: Sekant: $r-1 = 1.618\ldots - 1 = 0.618\ldots$ $\Rightarrow$ 61.8% økning i riktige siffre per iterasjon.

Newton: $r-1 = 2-1 = 1 \Rightarrow$ 100% økning i antall riktige siffre.

Numerisk derivasjon (kap. 11)

problem 11.1: Anta f bare er kjent i isolerte punkter.

Numerisk derivasjon går ut på regne ut tilnærminger til f' ved å kombinere de kjente funksjonsverdiene.

Siden $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, så har vi tilnærmingen.

obs 11.2 Hvis vi kjenner $f(a)$ og $f(a+h)$, så kan vi bruke $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ som en tilnærming til $f'(a)$

Denne kalles for Newtons differenskvotient.

Tolkning: sekanten gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ er

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a)$$

Vi ser at stigningstallet til denne er Newtonkvotienten

Når vi regner ut Newtonkvotient får vi en feil i forhold til $f'(a)$

Hva kan vi si om feilen?

Taylors formel om a:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)((a+h)-a) + \frac{f''(\xi_h)}{2}((a+h)-a)^2$$

ξ_h mellom a og $a+h$

$$= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi_h)}{2}h^2$$

$$-\frac{f''(\xi_h)}{2}h^2 = f'(a)h - f(a+h) + f(a) \quad \leftarrow \text{deler på } h$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{f''(\xi_h)}{2}h$$

Dette kalles for trunkeringsfeilen, og vi skriver

$$E(f; a, h) = \left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)| \frac{h}{2}$$

(dette er Lemma 11.6)

Tilnærmer vi den deriverte med Newtonkvotienten vil vi i tillegg gjøre en avrundingsfeil. Denne skal vi få kontroll på i morgen.