Numerisk derivasjon

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad h > 0$$

$$\text{feil} \approx \frac{h}{2}|f''(a)| + \frac{2\varepsilon}{h}|f(a)|, \quad \varepsilon \approx 10^{-16}$$

$$\text{Optimal } h \approx 2\sqrt{\frac{\varepsilon |f(a)|}{|f''(a)|}}$$

okt 23-10:12

Metode for utledning av tilnærminger til deriverte.

1. Interpoler f med et polynom p i noen punkter, for eksempel, a, $a+h$.

2. Bruk tilnærmingen
$$f'(a) \approx p'(a)$$

3. Estimer trunkeringsfeil og avrundingsfeil.

Eks: Interpoler i a, $a+h$, $\quad f[a, a+h]$

Da blir $p(x) = f(a) + \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a)$

$$p'(x) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) \approx p'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Metode 2. Interpoler i $a-h$, a, $a+h$.

Da er interpolasjonspolynomet

$$P_2(x) = f(a-h) + f[a-h, a](x-a+h) + f[a-h, a, a+h](x-a+h)(x-a)$$

Newton-formen.

Derivasjon:

$$P_2'(x) = f[a-h, a] + f[a-h, a, a+h](2x-2a+h)$$

$$f'(a) \approx P_2'(a) = f[a-h, a] + f[a-h, a, a+h] \cdot h$$

litt regning $= \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

okt 23-10:36

Tilnærming til den 2. deriverte.

Vi bruker $P_2(x)$ fra foregående slide:

og bruker

$$f''(a) \approx P_2''(a)$$

Vi har $P_2''(x) = 2 f[a-h, a, a+h]$

$$P_2''(a) = 2 f[a-h, a, a+h]$$

$$= 2 \cdot \frac{f[a, a+h] - f[a-h, a]}{2h}$$

$$= \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a-h)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \approx f''(a)$$

$$\text{Feil} \approx \frac{h^2}{12} |f^{(4)}(a)| + \frac{3\varepsilon}{h^2} |f(a)|$$

Optimal h: $\sqrt[4]{\dfrac{36\,\varepsilon\,|f(a)|}{|f^{(4)}(a)|}}$, $\varepsilon \approx 10^{-16}$

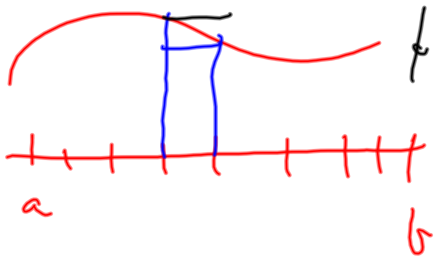
Optimal $h \approx 10^{-4}$

okt 23-10:46

Numerisk integrasjon

Ønsker å beregne $\int_a^b f(x)\,dx$ for vilkårlige f.

For noen funksjoner kan vi bruke antiderivasjon.



Definisjon av $\int_a^b f(x)\,dx$.

Del $[a,b]$ i småbiter:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$ - partisjon.

Uniform partisjon: $x_i - x_{i-1} = h, \; i = 1 \dots n$

La $m_i = \min\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \max\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Nedre trappesum $\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

Øvre trappesum $\overline{I} = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

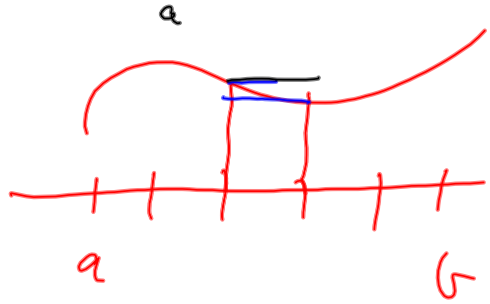
La $n \to \infty$, hvis $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{I} = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{I}$

så sier vi at f er integrerbar

og $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \underline{I}$$

Thm 12.3. La t_i være et vilkårlig tall i $[x_{i-1}, x_i]$. Hvis f er integrerbar vil

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



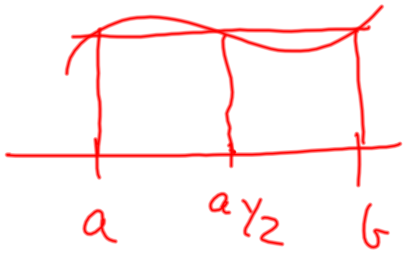
okt 23-11:37

Feilanalyse for midtpunktmetoden.

Først feilen med bare ett delintervall:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f(a_{1/2}), \quad a_{1/2} = \frac{a+b}{2}$$

Hva er feilen?



Taylor om midtpkt $a_{1/2}$.

$$f(x) = f(a_{1/2}) + (x-a_{1/2}) f'(a_{1/2}) + \frac{(x-a_{1/2})^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (a_{1/2}, x)$$

Integrerer Taylor!

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(f(a_{1/2}) + (x-a_{1/2}) f'(a_{1/2}) + \frac{(x-a_{1/2})^2}{2} f''(\xi) \right) dx$$

$$= f(a_{1/2})(b-a) + f'(a_{1/2}) \underbrace{\left[\frac{1}{2}(x-a_{1/2})^2\right]_a^b}_{0\,=} + \int_a^b \frac{(x-a_{1/2})^2}{2} f''(\xi)\,dx$$

$$= f(a_{1/2})(b-a) + \int_a^b \frac{(x-a_{1/2})^2}{2} f''(\xi)\,dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - f(a_{1/2})(b-a) \right| = \left| \int_a^b \frac{(x-a_{1/2})^2}{2} f''(\xi)\,dx \right.$$

okt 23-11:47