Kap 10 Kalkulus

10.1 Førsteordens lineære differensiallikninger.

(Differensiallikninger får vi ofte ved å skrive om et praktisk problem ved å finne en sammenheng mellom en funksjon og dens deriverte)

ser slik ut: $y'(x) + f(x)y = g(x)$ (1)

y: den ukjente funksjonen, f, g er kjente funksjoner, x variabelen.

NB: Litt annen notasjon i kompendiet: der skriver vi $x' = f(t, x)$ der t er variabel, x er ukjent funk.

Def. 10.1 Anta f, g er def. på et åpent intervall I. Vi sier at y er en løsning av (1) på I hvis y er definert og deriverbar på I, og (1) holder for alle $x \in I$.

Eks 10.1.2 Likningen $y' + \underbrace{2x}_{f(x)}y = \underbrace{x}_{g(x)}$

har $y(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ som en løsning, siden

$$y' + 2xy = \underbrace{-2xe^{-x^2}}_{y'} + 2x\left(e^{-x^2} + \frac{1}{2}\right) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} + x$$
$$= x = \text{høyre side}$$

Hvordan fant jeg y?

Setning 10.1.3 Anta f, g kont. på åpent intervall I, og la F være en antiderivert til f på I.
Da er løsningene av $y' + f(x)y = g(x)$ på I gitt ved

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + \underbrace{C}_{\text{velges fritt.}}\right)$$

Trenger "strengt talt" ikke huske:
Kan også gjøre slik: regn ut $e^{F(x)}$, gang på begge sider
kalles for integrerende faktor.

Eks 10.1.4 Tilbake til $y' + 2xy = x$ $\quad f(x) = 2x,\ F(x) = x^2$

ganger e^{x^2}:

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$

$$(ye^{x^2})' = xe^{x^2} = \frac{1}{2}2xe^{x^2} \qquad u = x^2$$

integrer:

$$ye^{x^2} = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}}}$$

(C=1 gir løsningen vi prøvde ut i eks. 10.1.2)

Sekjon 10.2

den deriverte av en funksjon: Hvor mye funksjonen endrer seg per tidsenhet. Kalles også for vekstrate.

Eks. 10.2.1 Dyrepopulasjon y som består av P dyr ved tid $t=0$, og har vekstrate r.
Hva er populasjonen etter t år?

vekstrate r betyr: populasjonen øker med $ry(t)$ per tidsenhet.

$$\underbrace{\text{økning fra } t \text{ til } t+\Delta t}_{y(t+\Delta t)-y(t)} \approx ry(t)\Delta t$$

$$y(t+\Delta t)-y(t) \approx ry(t)\Delta t$$

del med Δt $$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \approx ry(t)$$

tar grenseverdi: $$y'(t) = ry(t)$$

$$F(t) = -rt, \quad e^{F(t)} = e^{-rt}$$

$$\Rightarrow y'(t) - \underbrace{r}_{f(t)} y(t) = \underbrace{0}_{g(t)}$$

$$y'(t)e^{-rt} - re^{-rt}y(t) = 0$$

$$(y(t)e^{-rt})' = 0$$

$$y(t)e^{-rt} = C \Rightarrow y(t) = Ce^{rt}. \text{ Hva er } C?$$

her: $y(0) = P \Rightarrow P = Ce^{0} \Rightarrow C = P$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = Pe^{rt}}}$$

Eks 10.2.2 y er nå et lands befolkning, og vi antar

1. Befolkningen formerer seg med vekstrate r.
2. Befolkningstilskudd per år er Ne^{at} (innvandring)
3. $y(0) = B$

For en liten Δt har vi nå at

$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx \overbrace{ry(t)\Delta t}^{1.,\ \text{som før}} + \overbrace{Ne^{at}\Delta t}^{2.,\ \text{ny}}$$

$$\Downarrow$$

$$y'(t) = ry(t) + Ne^{at}$$

$$y'(t) - ry(t) = Ne^{at}$$

samme f som i forrige eks. $\quad e^{F(t)} = e^{-rt}$

$$e^{-rt}y'(t) - re^{-rt}y(t) = Ne^{at}e^{-rt}$$

$$\left(e^{-rt}y(t)\right)' = \underline{Ne^{(a-r)t}}$$

$a = r$

$$e^{-rt}y(t) = Nt + C$$

$$y(t) = (Nt + C)e^{rt}$$

$y(0) = B \Rightarrow C = B$

$$\Rightarrow y(t) = (Nt + B)e^{rt}$$

$a \neq r$

$$e^{-rt}y(t) = \frac{N}{a-r}e^{(a-r)t} + C$$

$$y(t) = \frac{N}{a-r}e^{at} + Ce^{rt}$$

$y(0) = B$:

$$B = \frac{N}{a-r} + C \Rightarrow C = B - \frac{N}{a-r}$$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{N}{a-r}e^{at} + \left(B - \frac{N}{a-r}\right)e^{rt}}}$$

Seksjon 10.3

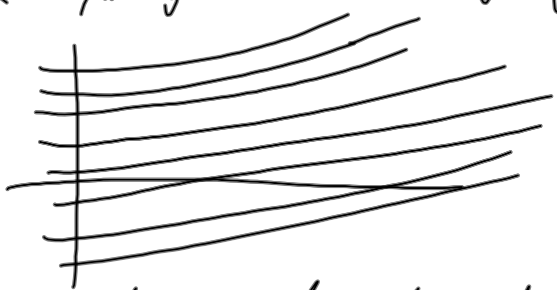
Setning 10.3.1 med samme betingelser som ~~før~~, og med $c \in I$, $d \in \mathbb{R}$, så finnes nøyaktig en løsning av $y' + f(x)y = g(x)$, $x \in I$, slik at $y(c) = d$.

Løsningen er:
$$y(x) = e^{-\int_c^x f(t)\,dt}\left(\int_c^x g(t)\, e^{\int_c^t f(s)\,ds}\, dt + d\right)$$

(men ikke pugg denne).

Bevises ikke, men lett å se fra den generelle løsningen at to forskjellige løsninger ikke kan gå gjennom samme punkt.

Løsningene:



Løsningskurvene dekker hele rommet, slik at til ethvert punkt i planet finnes nøyaktig en løsningskurve som går gjennom det.

Seksjon 10.4

En differensiallikning kalles separabel dersom den kan skrives på formen $\underline{q(y)\,y' = p(x)}$

x på høyre side, y, y' på venstre side — separert.

Eks. 10.4.1

La oss løse: $e^{-x}y' = 1+y^2$

kan skrives: $\dfrac{y'}{1+y^2} = e^x$. Nå er $q(y) = \frac{1}{1+y^2}$, $p(x) = e^x$

integrerer: $\displaystyle\int \frac{y'(x)\,dx}{1+y(x)^2} = \int e^x\,dx$

$u = y(x)$
$du = y'(x)dx$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = e^x + C_2$$

$$\arctan u + C_1 = e^x + C_2$$

$$\arctan y = e^x + C \qquad (C = C_2 - C_1)$$

$$\underline{\underline{y(x) = \tan(e^x + C)}}$$

Oppsummering: Gjør alltid det samme for sep. diff. :

$$q(y)\,y' = p(x) \Rightarrow \int q(y(x))\,\underline{y'(x)\,dx} = \int p(x)\,dx$$

$u = y(x)$
$du = y'(x)dx$

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$$

$$Q(y) = P(x) + C$$

$$y = \cdots$$

Eks. 10.4.3 $\quad e^{-x} y y' = -1$

separerer: $\quad y y' = -e^{x}$

integrerer: $\quad \int y(x) \underbrace{y'(x)\,dx}_{du} = \int (-e^{x})\,dx$

$$\int y\,dy = -e^{x} + C_2$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = -e^{x} + C_2$$

$(D = 2C)$

$$\frac{1}{2}y^2 = -e^{x} + C \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\sqrt{D - 2e^{x}}}}$$

Vi ser at: Løsningene er bare definert der $D - 2e^{x} \geq 0$, som blir et intervall som varierer med D.
Med andre ord: Mens vi for førsteordens lineære likninger vet at løsningen eksisterer overalt der likningen er definert, vil vi for separable diff.likninger kunne oppleve at løsningens def. område varierer fra løsning til løsning.