Differensligninger   Kalk. kap 4.1

2. ordens ligning

(*) $x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$

x_0, x_1 er gitt.

Finn følgen $\{x_n\}$ som tilfredstiller (*) og med gitt x_0 og x_1.

$$x_{n+2} = -b\, x_{n+1} - c\, x_n$$

sep 18-10:11

Løsning ved formel

Prøv med $x_n = r^n$ som løsning.

Hvis $\boxed{r^2 + br + c = 0}$ (**)

vil dette være en løsning.

Hvis r_1 og r_2 løser (**) vil

$$\boxed{x_n = C_1' r_1^n + D r_2^n}$$

løse $\boxed{x_{n+2} + bx_{n+1} + c x_n = 0}$

for alle reelle tall C_1' og D.

Eksempel

Fibonacci: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Kan skrives $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

Kar. ligning $r^2 - r - 1 = 0$

Løsn: $r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

Gen løsn. av diff ligning:

$$x_n = C_1'\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + D\left(\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n$$

$$1 = x_1 = C_1'\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + D\left(\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)$$

$$1 = x_2 = C_1'\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2 + D\left(\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^2$$

Vi får $C_1' = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Endelig løsn $x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Hva hvis vi bare har en rot? $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$

Når vi løser $r^2 + br + c = 0$

så er $r = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

For å kunne tilpasse løsningen til to startverdier trenger jeg to løsninger.

Hvis $r_1 = r_2 = r$ så viser det seg at nr^n også er en rot.

Generell løsn: $x_n = C_1 r^n + D \cdot n \cdot r^n$

To komplekse konjugerte røtter

$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0 \qquad b, c \in \mathbb{R}$

Kar. ligning: $r^2 + br + c = 0 \quad (*)$

$$r = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$$

Sett $r = -\frac{b}{2} + i\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$

Da er de to røttene av $(*)$ r og $\bar{r}$

Da er $x_n = C r^n + D \bar{r}^n$

løsning av differensligning.

Ønsker reell løsning!

sep 18-10:44

Vi gjør følgende:

$$x_n = D r^n + \bar{D} \bar{r}^n$$

der D er et vilkårlig komplekst tall.

$D = A + iB, \quad A, B \in \mathbb{R}$

Vi ser at

$$\overline{x_n} = \overline{D r^n + \bar{D} \bar{r}^n} = \overline{D r^n} + \overline{\bar{D} \bar{r}^n}$$

$$= \bar{D} \bar{r}^n + D r^n = x_n$$

Så $x_n \in$

sep 18-10:51

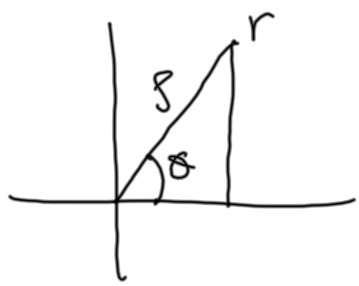
Reell form:

$$x_n = D r^n + \bar{D} \bar{r}^n,$$

$D = A + iB$, anta at $r = \rho e^{i\theta}$

Sett inn i uttrykket for $= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
x_n og bli kvitt alle i'er!

$\rho = |r|$, $r = a + ib$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$x_n = D r^n + \bar{D}\bar{r}^n, \qquad D = A + iB$$

Vi får $\qquad r = \rho e^{i\theta}$

$$x_n = (A+iB)(\rho e^{i\theta})^n + (A-iB)(\rho e^{-i\theta})^n$$

$$= (A+iB)\rho^n e^{in\theta} + (A-iB)\rho^n e^{-in\theta}$$

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

$$= (A+iB)\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$+ (A-iB)\rho^n(\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$= \rho^n(2A\cos n\theta + 2B\, i^2 \sin n\theta)$$

$$= \rho^n(2A\cos n\theta - 2B \sin n\theta)$$

Altså er $\quad x_n = F\rho^n \cos n\theta + G\rho^n \sin n\theta$

der $F, G \in \mathbb{R}$.

Skal løse $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$

Anta at kar. ligning $r^2 + br + c = 0$

har to løsninger r_1 og r_2

$x_{n+3} + b x_{n+2} + c x_{n+1} + d x_n = 0$

i) $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$x_n = C r_1^n + D r_2^n$$

ii) $r_1 = r_2 = r$

$$x_n = C r^n + D n r^n$$

iii) $r_2 = \bar{r_1} = \bar{r}$, $r = \rho e^{i\theta}$

$$x_n = C' \rho^n \cos n\theta + D \rho^n \sin n\theta$$

sep 18-11:29

Inhomogene ligninger

Eks: 100 000 i banken, 6 % rente

Hvis x_n angir beløp etter n år er

$$x_{n+1} = 1.06\, x_n \quad , \quad x_0 = 100\,000$$

Vi tar ut A kr. hvert år.

Da blir ligningen

$$x_{n+1} = 1.06\, x_n - A$$

$$x_{n+1} - 1.06\, x_n = -A$$ – inhomogen ligning

sep 18-11:34

Lemma. Anta at x_n^p er en løsning av den inhomogene ligningen

$$\boxed{x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n)} \quad (*)$$

der $f(n)$ er en vilkårlig funksjon av n.

Da er de andre løsningene av $(*)$ gitt ved $\boxed{x_n = x_n^p + x_n^h}$

der x_n^h er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen

$$\boxed{x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0}$$

Eksempel:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n+1$$

Homogen lign: $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$

Kar. lign: $r^2 - r - 6 = 0$, røtter $r_1 = -2$, $r_2 = 3$

$$x_n^h = C_1(-2)^n + D3^n$$

Må også finne én løsning av inhomogen lign.

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n+1$$

Vi prøver med en løsning på samme form som høyre siden, $x_n^p = An+B$

Vi setter inn

$$x_{n+1}^p = A(n+1)+B, \quad x_{n+2}^p = A(n+2)+B$$

$$-6n+1 = x_{n+2}^p - x_{n+1}^p - 6x_n^p$$

$$= A(n+2)+B - A(n+1) - B - 6An - 6B$$

$$= -6An + A - 6B = (-6A)n + (A-6B)$$

For at dette skal holde for alle n

må: $-6 = -6A \Rightarrow A = 1$

$$1 = A - 6B \Rightarrow 1 = 1 - 6B \Rightarrow B = 0$$

Dermed er $x_n^p = An+B = n$

Generell løsn: $x_n = x_n^h + x_n^p$

$$= C_1(-2)^n + D3^n + n$$

sep 18-11:44