Differensialligninger

1. Hva er en differensialligning?
   a) Ligning med en ukjent funksjon og dens deriverte.
   b) $x' = f(t, x)$. Hvis (t_0, x_0) er kjent kan vi beregne tan

$$T(u) = x(t) + (u-t)\,x'(t)$$

$$T(u) = x_0 + (u-t_0)\,x'(t_0)$$

- tangenten til $x(t)$ i t_0.

2. Løsningsmetoder
   a) Analytiske
      i) Lineære, første orden, 10.1 i Kalkulus
      $$y' + f(x)\,y = g(x)$$
      ii) Separable ligninger. 10.4 i Kalkulus
      $$q(y)\,y' = p(x)$$
      iii) Andreordens lineære diff.lign med konstante koeff.
   b) Numeriske teknikker
      i) Eulers metode
      ii) Euler midtpkt.
      iii) Runge-Kutta 2., 4. orden (Kjenne til)
3. a) Anvendelser
   b) Enkel feilanalyse
   c) Eksistens av løsning
   d) Systemer av ligninger.

$$x_{k+1} = x_k + h\,f(t_k, x_k)$$
$$x_{k-1} = x_k - h\,f(t_k, x_k)$$

Oppgave 2e i oblig 2.

Vi har ligningen $x_{k+1} = x_k + h\left(1 + \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)^2\right)$

Vi løser mh.p x_{k+1}

$$x_{k+1} = \frac{2 - hx_k \pm 2\sqrt{1-h^2-2x_k h}}{h}$$

Må ha $1-h^2-2x_k h \geq 0 \Rightarrow h \leq -x_k + \sqrt{1+x_k^2}$

Hva om vi velger

$$x_{k+1} = \frac{2 - h\,x_k + 2\sqrt{1-h^2-2x_k h}}{h}$$

Relativ feil.

Anta at $\tilde{a}$ er en tilnærming til a.
Da er absolutt feil gitt ved

$$|a - \tilde{a}|$$

Relativ feil er $\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|}$

Hvis a og $\tilde{a}$ er flyttall og

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} \approx 10^{-p}$$

så har a og $\tilde{a}$ omtrent p siffer felles.

Test på konvergens:

Følge kregnes: $x_0, x_1, x_2, \ldots$.
Ønsker å stoppe når relativ feil er mindre enn ε.
Gjøres i praksis ved å teste

$$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \leq \varepsilon$$

Test isteden $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon |x_k|$

$$\frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$n=1$ $$\frac{(x-a)^2 f''(\xi)}{2}$$

$n=2$ $$\frac{(x-a)^3 f'''(\xi)}{6}$$