Monday 5/12 2011

Del 2

Oppg 2 : Fibonacci-følgen: $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ $\quad x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Vi definerer: $y_n = x_{4n}$ $\quad y = \{x_4, x_8, x_{12}, \dots\}$

Vi skal vise: alle y_n er delelig med 3

P_n = y_n delelig med 3.

P_1 : $y_1 = x_4$ delelig med 3? $\quad x_3 = x_1 + x_2 = 2$, $x_4 = x_2 + x_3 = 1+2 = 3$

$\Rightarrow P_1$ er sann.

Anta at P_n er sann. Vi skal da vise at også P_{n+1} er sann.
dvs. vi skal vise at y_{n+1} er delelig med 3

$$y_{n+1} = x_{4(n+1)} = x_{4n+4} = \underbrace{x_{4n+3}} + x_{4n+2} =$$

$$x_{4n+2} + x_{4n+1} + x_{4n+2} = 2x_{4n+2} + x_{4n+1}$$

$$= 2(x_{4n+1} + x_{4n}) + x_{4n+1} = \underbrace{3x_{4n+1}}_{\text{delelig med } 3} + \underbrace{2x_{4n}}_{\text{delelig med } 3.}$$

$\Rightarrow y_{n+1}$ delelig med 3 $\Rightarrow$ P_{n+1} er sann

Oppgave 1.2.15 (Kalkulus) (vanskeligere)

Skal vise: for alle $n \geq 2$: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \leq \frac{n^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{n} k^3}_{P_n}$

$$P_2 : \sum_{k=1}^{1} k^3 \leq \frac{2^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{2} k^3$$

$$1 \leq 4 \leq 1+2^3 = 9 \Rightarrow P_2 \text{ er sann}$$

La oss vise at P_{n+1} er sann, når vi vet at P_n er sann:

$$P_{n+1} : \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \frac{(n+1)^4}{4} \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

induksjonsantagelsen!

$$
\begin{array}{rcccccc}
\text{HS}\ \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 & = & \sum_{k=1}^{n} k^3 & + & n^3+3n^2+3n+1 & & \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \\
 & & \geq & & \geq & \Rightarrow & \geq \\
\frac{(n+1)^4}{4} = \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{4} & = & \frac{n^4}{4} & + & n^3+\frac{3}{2}n^2+n+\frac{1}{4} & & \frac{(n+1)^4}{4} \\
 & & \geq & & \geq & & \geq \\
\text{VS}\ \sum_{k=1}^{n} k^3 & = & \sum_{k=1}^{n-1} k^3 & + & n^3 & & \sum_{k=1}^{n} k^3
\end{array}
$$

induksjonsantagelsen!

$\Rightarrow P_{n+1}$ er sann!

(har brukt: hvis $a \leq b$, $c \leq d$ så er $a+c \leq b+d$)