1.1

Se: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243}$ ved hjelp av summetegn:

$k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3 \quad k=4 \quad k=5$

har formen $\frac{(-1)^k}{3^k}$

summen kan skerves som $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{3^k}}}$

6a: $\sum_{k=0}^{8} (2k+3) = \sum_{n=1}^{9} (2(n-1)+3) = \sum_{n=1}^{9} (2n-2+3)$

$n = k+1 \longrightarrow k = n-1$

vi gjør et enkelt variabelskifte

$= \underline{\underline{\sum_{n=1}^{9} (2n+1)}}$

1.2.5

Vi skal bevise påstanden

$$P_n: \; n^5 - n \text{ er delelig med } 5$$

Vi viser først P_1: $1^5 - 1 = 0$, som er delelig med 5.

Anta vi har vist at $P_1, P_2, \dots, P_n$ er sanne.
Vi skal vise at P_{n+1} også er sann.

P_{n+1}: $(n+1)^5 - (n+1)$ er delelig med 5:

$$(n+1)^5 - (n+1) = \underbrace{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}_{(n+1)^5} - (n+1)$$

$$= \underbrace{n^5 - n}_{\text{er delelig med 5 } (P_n)} + \underbrace{5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n}_{\text{delelig med 5.}}$$

$\Rightarrow (n+1)^5 - (n+1)$ er delelig med 5 $\Rightarrow P_{n+1}$ også sann

1.2.10

a)

$n=1$	1	$= 1$
$n=2$	$1+3$	$= 4$
$n=3$	$1+3+5$	$= 9$
$n=4$	$1+3+5+7$	$= 16$
$n=5$	$1+3+5+7+9$	$= 25$

VS: sum av n første oddetall HS: n^2

Vi lager hypotesen: P_n: sum av n første oddetall er n^2

b) P_1 er sann, det så vi i a)

Anta at vi har vist P_n, og så skal vise P_{n+1}

det n'te oddetallet er $2n-1$.

vi skal vise at P_{n+1}: $1+3+\cdots \underbrace{\overset{(n+1)\text{'te oddetallet}}{(2(n+1)-1)}}_{2n+1} = (n+1)^2$

(bruker P_n) $\overbrace{1+3+\cdots+(2n-1)}^{\text{sum av de n første.}} + (2n+1)$

$= n^2+2n+1 = (n+1)^2 \Rightarrow$ P_{n+1} er sann

1.2.11

$f(x) = e^{x^2}$

Vi skal vise at $\overbrace{f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^2}}^{P_n}$, der p_n er n'te grads polynom.

$n=1$: $f^{(1)}(x) = f'(x) = \underbrace{2x}_{p_1} e^{x^2}$

p_1, som er et 1'te grads polynom.

$\Rightarrow P_1$ er sann.

Ant så at vi har vist P_n, dvs $f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^2}$

vi skal vise P_{n+1}: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (p_n(x) e^{x^2})'$

$$= p_n(x)' e^{x^2} + p_n(x) \cdot 2x e^{x^2}$$

$$= (\underbrace{p_n(x)'}_{\text{grad } n-1} + \underbrace{2x\, p_n(x)}_{(n+1)\text{'te grads polynom}}) e^{x^2}$$

(n+1)'te grads polynom, siden p_n er n'te grad (det sier P_n)

$$= p_{n+1}(x) e^{x^2}, \text{ der } p_{n+1} \text{ er et } (n+1)\text{'te grads. pol.}$$

|| definert som $\underline{p_{n+1}(x) = p_n(x)' + 2x\, p_n(x)}$

$\Rightarrow P_{n+1}$ er også sann.