1.4.8

a) Vi skal vise at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Vi skriver $2^n = (1+1)^n$

(bruker binom.) $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$

b) 2^n = antall mulige måter å plukke ut ting på

(for hver ting har vi to muligheter: med / ikke med
så totalt $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ muligheter)

$2^n = \sum_k \underbrace{\text{antall muligheter for å plukke ut } k \text{ ting}}_{\binom{n}{k}}$

2.1.9

Vi skal vise at $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

Vi skriver: $|x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)|$

$\overset{\text{(trekant)}}{\leq} |x-z| + |z-y|.$

2.1.10: Vi skal vise at $|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$, alle n

Bevis: $n=2$: $|a_1+a_2| \leq |a_1| + |a_2|$, som <u>er</u> trekantulikheten.

Anta at vi har vist dette for $1, 2, 3, \dots, n$. Vi skal også vise det for $n+1$, dvs $|a_1 + \dots + a_{n+1}| \leq |a_1| + \dots + |a_{n+1}|$

Vi skriver: $|a_1 + \dots + a_{n+1}| = |(a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}|$

$$\overset{\text{trekant}}{\leq} |a_1 + \dots + a_n| + |a_{n+1}|$$

$$\overset{\text{induksjonsant.}}{\leq} (|a_1| + \dots + |a_n|) + |a_{n+1}|$$

$$= |a_1| + \dots + |a_{n+1}|$$

$\Rightarrow$ stemmer også for $n+1$ tall

2.2.5

b) a irrasjonal $\Rightarrow$ $-a$ er også irrasjonal:

Hvis nemlig $-a$ var rasjonal, så ville $a + (-a) = a - a = 0$ som er rasjonal, men summen av et irrasjonalt og et rasjonalt tall er et irrasjonalt tall $\Rightarrow$ motsigelse. Konklusjon: $-a$ er irrasjonal.

a) nei: summen av to irrasjonale tall kan bli rasjonal:

$$a + (-a) = 0$$

irrasjonale

c) a^2 rasjonal. er a rasjonal?

ikke nødvendigvis. sett $a = \sqrt{2}$

d) anta a^2 irrasjonal. Er a også irrasjonal?

ja: anta nemlig for motsigelse at a rasjonal, $a = \frac{b}{c}$

$\Rightarrow a^2 = \frac{b^2}{c^2}$, som også er rasjonal $\Rightarrow$ motsigelse. a dermed irrasjonal.

e) a irrasjonal $\Rightarrow \frac{1}{a}$ irrasjonal.

det samme som å vise at $\frac{1}{a}$ rasjonal $\Rightarrow$ a rasjonal.

$$a = \frac{b}{c} \quad \frac{1}{a} = \frac{c}{b}$$

2.2.8

Vi skal vise at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt igjen.

anta $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_m}$ (p_i, q_j primtall)

a) Vi får (kvadrerer) $2 = \frac{p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n}{q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m}$ ganger opp

$$2 q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$$

b) La r være antall tall blant $p_1, \ldots, p_n$ som er 2

s — " — $q_1, \ldots, q_m$ — " —

venstre side: $2s+1$ faktorer av 2.

høyre side: $2r$ faktorer av 2

$\Rightarrow$ $2r$ og $2s+1$ er forskjellige tall (partall/oddetall)

c) har to forskjellige primtallsfaktoriseringer med forskjellige antall 2-tall.

dette er en motsigelse av aritmetikkens fundamentalteorem.

2.4.9: Vi definerer $2 = 1+1$, og skal vise at $a+a = 2 \cdot a$

$$
\begin{aligned}
a+a &\overset{A4}{=} a \cdot 1 + a \cdot 1 \\
&\overset{A3}{=} a(1+1) = a \cdot 2 \\
&\overset{A1}{=} 2 \cdot a
\end{aligned}
$$