11.1.6 gjorde tidligere: $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$

(a) Vi skriver $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi)$

$\xi \in [a, a+h]$

Vi får $hf'(a) - (f(a+h) - f(a)) = -\frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi)$

feil med Newtonkvot. $\longrightarrow$ $f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(a) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$

$(|a+b| \leq |a| + |b|)$

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{h^2}{6} |f'''(\xi)|$$

$$\leq \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{h^2}{6} \max_{x \in [a, a+h]} |f'''(x)|$$

ser at feil nå er begrenset med den tredjederiverte og en annenderivert. Vi får en enklere begrensning når vi bruker et ledd mindre i Taylorrekken.

(b) Vi skriver $f(a+h) = f(a) + hf'(\xi)$

$\xi \in [a, a+h]$

Vi ser her at $f'(a)$ ikke inngår, slik at vi ikke kan finne et estimat for feilen i Newtonkvotienten.

11.5.4

a) Tilnærmer den deriverte ved

$$f'(a) \approx c_1 f(a-h) + c_2 f(a+h)$$

Vil skal være eksakt for $f(x)=1$ og $f(x)=x$

$f(x)=1$

$$\underset{f'(a)}{0} = c_1 \cdot \underset{f(a-h)}{1} + c_2 \cdot \underset{f(a+h)}{1} \iff 0 = c_1 + c_2 \iff c_2 = -c_1$$

$f(x)=x$

$$\underset{f'(a)}{1} = c_1 \underset{f(a-h)}{(a-h)} + c_2 \underset{f(a+h)}{(a+h)} \iff 1 = c_1 a + c_2 a - c_1 h + c_2 h$$

$$= c_1 a - c_1 a - c_1 h - c_1 h$$

$$= -2c_1 h \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2h}$$

$$c_2 = \frac{1}{2h}$$

$$\Rightarrow f'(a) \approx -\frac{1}{2h} f(a-h) + \frac{1}{2h} f(a+h)$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

(b) Anta $f(x) = cx + d \Rightarrow f'(x) = c$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{c(a+h)+d - (c(a-h)+d)}{2h}$$

$$= \frac{c(a+h-a+h)}{2h} = \frac{2ch}{2h} = c$$

$\Rightarrow$ metoden er eksakt for alle førstegradspolynomer.

Også eksakt for andregradspolynomer:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \qquad f'(a) = 2a$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{(a+h)^2 - (a-h)^2}{2h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2 + 2ah - h^2}{2h}$$

$$= \frac{4ah}{2h} = 2a \Rightarrow \text{eksakt også for } f(x) = x^2$$

12.4.4

Vi skal regne ut $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$, med nøyaktig bedre enn 10^{-10}

a) trapesregelen: $a=0,\ b=1$

feilen er begrenset av $(b-a)\frac{h^2}{6}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \leq 10^{-10}$

$f'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2}$, $f''(x) = \frac{8}{(1+2x)^3}$

$|f''(x)| \leq 8$

$$\Downarrow$$

$$1\cdot\frac{h^2}{6}\cdot 8 \leq 10^{-10}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{4}{3}h^2 \leq 10^{-10}$$

$$\Downarrow$$

$$h \leq 10^{-5}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

antall funksjonsberegninger $\approx \frac{1}{h} \approx 115470.05$

$\Rightarrow$ trenger minst 115471 beregninger av f.

(b): Midtpunktsregelen: Her er feilen begrenset av

$$(b-a)\frac{h^2}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

... trenger 57736 funksjonsberegninger.

(c) feilen ved Simpsons metode: $\leq (b-a)\frac{h^4}{2880}\max_{x\in[a,b]}|f^{(iv)}(x)|$.

her: $f^{(iv)}(x) = \frac{384}{(1+2x)^5} \Rightarrow |f^{(iv)}(x)| \leq 384$

feil $\leq \frac{h^4}{2880}\cdot 384 \leq 10^{-10} \Rightarrow h \leq (2880\cdot 10^{-10}/384)^{1/4}$

$\frac{1}{h} \approx 191.09$. Trenger 192 funksjonsberegninger.