Tall - notasjon:

$\mathbb{N}$ - naturlige tall: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$

Aritmetikkens fundamentalteorem:

Et naturlig tall $a > 1$ kan skrives som et produkt av primtall på en entydig måte.

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Partall: $\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Oddetall: $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \{2n-$

Summetegn.

Må ofte summere lange sekvenser av tall på samme form:

$1+2+3+4+5+ \cdots +100$, $\quad n,\ n=1,\ldots,100$

$2+4+6+8+10+ \cdots +100$, $\quad 2n,\ n=1,\ldots,50$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ \cdots +\frac{1}{10}$, $\quad \frac{1}{n},\ n=1,\ldots,10$

Kan skrives:

$$\sum_{n=1}^{100} n \ , \quad \sum_{n=1}^{50} 2n \ , \quad \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}$$

Induksjonsbevis

Vi har ofte behov for å summere naturlige tall, men hva blir

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+\cdots+n \; ?$$

Eksempler:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \; , \quad \sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3 \; , \quad \sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10 \; , \quad \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$$

Det viser seg at formelen $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ stemmer for $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Hvordan kan vi vise at dette stemmer for alle mulige naturlige tall?

Forslag til verifisering: Sett $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $S(1) = 1$

$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = 3$, $S(2) = 3$

$\vdots$

$\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=1}^{4} i + 5 = 15$, $S(5) = 15$

$\sum_{i=1}^{6} i = \sum_{i=1}^{5} i + 6 = 21$, $S(6) = 21$

Anta at vi fortsetter og finner at formelen stemmer for
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, k$

Vil det da stemme for $n = k+1$?

Må sjekke $\sum_{i=1}^{k+1} i$. Husk at $S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = S(k+1) \text{ !!!}$$

Med andre ord:
Hvis formelen stemmer for $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, k$
så stemmer den og også for $n = k+1$.

Vi sjekket manuelt for $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
Sett $k = 7$. Argumentet over viser at formelen også stemmer for $n = k+1 = 8$

Generelt induksjonsbevis:

Vi har mange utsagn $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$
som vi skal vise er sanne:

Vi gjør følgende:

(i) Sjekk at P_1 er riktig

(ii) Anta at P_k er sann og vis at da er også P_{k+1} sann.

Hvis begge disse stegene kan gjennomføres er P_n sann for alle naturlige tall n.

Eksamensoppgave 1.2.6 i Kalkulus:

Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle naturlige tall n.

P_n: $n(n^2+5)$ er delelig med 6.

(i) Sjekk P_1: for $n=1$ er $n(n^2+5) = 1\cdot(1+5) = 6$ som er delelig med 6. OK. ✓

(ii) Anta at P_k er sann. Bruk dette til å vise at P_{k+1} er sann.

P_k sann: $k(k^2+5)$ er delelig med 6.

Må vise at P_{k+1} er sann, det vil si $(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6, mer presist $(k+1)((k+1)^2+5)$ inneholder 6 som faktor.

Vi har

$$(k+1)((k+1)^2+5) = (k+1)(k^2+2k+1+5)$$
$$= k(k^2+2k+1+5) + k^2+2k+6$$
$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + k^2+2k+6$$
$$= k(k^2+5) + 2k^2+k+k^2+2k+6$$
$$= k(k^2+5) + \underbrace{3k^2+3k}_{3k(k+1)} + 6$$

Siden k eller $k+1$ er et partall er alle leddene delelige med 6.

Konklusjon: Hvis P_k er sann er også P_{k+1} sann. Siden P_1 er sann er dermed P_n sann for alle naturlige tall n.

Eksempel:

La en følge av tall være gitt ved formelen $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{3}{4}$ . . .

Vis at $P_n: x_n \leq 1$ for alle $n \geq 0$.

Ind. bevis: Sjekk P_0: $x_0 = 0 < 1$ OK.

Anta P_k ok, vise P_{k+1}.

P_k : $x_k < 1$

Vise P_{k+1}, $x_{k+1} < 1$

$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$