Fra sist: Begynte på 4.1 i kalkulus.

Differenslikninger: En følge $\{X_n\}$ er den ukjente.

førsteordens: $X_{n+1} = rX_n$ $\quad X_0 =$ beløp i banken ved tid 0, $r =$ renten

andreordens: $X_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = 0$

karakteristisk likning: $r^2 + br + c = 0$

tre muligheter:
- to komplekse røtter
- to reelle røtter
- en reell rot.

så på eks 4.1.7 (to reelle røtter)

eks 4.1.8 Fibonaccifølgen, $\quad X_{n+2} = \underbrace{X_{n+1}}_{\text{eksisterende kaniner}} + \underbrace{X_n}_{\text{nyfødte kaniner}}$

$X_n =$ antall par kaniner etter n måneder.

antar de formerer seg en gang i måneden, og første gang når de er to måneder gamle.

Kan skrives: $X_{n+2} - X_{n+1} - X_n = 0$. $\quad$ kar. likning: $r^2 - r - 1 = 0$

$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $\quad$ Generell løsning: $X_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Her: $X_1 = X_2 = 1$:

$$1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = C\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$1 = \frac{1}{2}(C+D) + \frac{\sqrt{5}}{2}(C-D)$ $\rightarrow$ trekk fra hverandre $\Rightarrow$ $C+D=0 \Rightarrow D=-C$

$1 = \frac{3}{2}(C+D) + \frac{\sqrt{5}}{2}(C-D)$

sett inn: $1 = \frac{\sqrt{5}}{2}(C-D) = \frac{\sqrt{5}}{2}2C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\quad D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$X_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}}$$

en reell rot. Lemma 4.1.9 : $x_n = n r_1^n$ er en løsning
hvis r_1 er den eneste roten til $r^2 + br + c = 0$

$\Rightarrow$ Generell løsning: $\underline{x_n = C r_1^n + D n r_1^n}$

Bevis for at $x_n = n r_1^n$ er løsning:

$r^2 + br + c = (r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2 \Rightarrow$ $-2r_1 = b$, $r_1^2 = c$

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = x_{n+2} - 2r_1 x_{n+1} + r_1^2 x_n$$
$$= (n+2) r_1^{n+2} - 2r_1 (n+1) r_1^{n+1} + r_1^2 \, n \, r_1^n = (n+2) r_1^{n+2} - 2(n+1) r_1^{n+2} + n r_1^{n+2}$$
$$= r_1^{n+2} \big((n+2) - 2(n+1) + n \big) = r_1^{n+2} \big(n - 2n + n + 2 - 2 \big) = \underline{0}$$

To komplekse røtter i $r^2+br+c=0$

Kaller disse for r og $\bar{r}$

Setning 4.1.13: De reelle løsningene kan skrives på formen $x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n$, C fritt valgt komplekst tall.

Bevis: Generell løsning har formen $x_n = Cr^n + D\bar{r}^n$, C, D fritt valgt, komplekse.

Hvis løsningen er reell, så er spesielt x_0, x_1 reelle.

$$\begin{aligned} x_0 &= C + D \\ x_1 &= Cr + D\bar{r} \end{aligned} \Rightarrow \quad C = \frac{\bar{r}x_0 - x_1}{\bar{r}-r}, \quad D = \frac{rx_0 - x_1}{r-\bar{r}}$$

(gang med $\bar{r}$, trekk fra.

Ser nå at: $\bar{C} = \overline{\left(\frac{\bar{r}x_0 - x_1}{\bar{r}-r}\right)} = \frac{\overline{(\bar{r}x_0 - x_1)}}{\overline{(\bar{r}-r)}} = \frac{r\bar{x}_0 - \bar{x}_1}{r-\bar{r}} = \frac{rx_0 - x_1}{r-\bar{r}} = D$

Derfor må en reell løsning ha formen $x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n$.

Omvendt er det også klart at $x_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n$ er reell.

$= Cr^n + \overline{Cr^n}$, og da kansellerer imaginærdelene hverandre, så reell.

Setning 4.1.14 Anta $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$ har to komplekse røtter $r, \bar{r}$, og skriv $r = \rho e^{i\theta}$ på polarform.

Da er $\underline{X_n = E\rho^n \cos n\theta + F\rho^n \sin n\theta}$ (E, F vilkårlige, reelle.)

Bevis: $X_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n = C(\rho e^{i\theta})^n + \bar{C}(\overline{(\rho e^{i\theta})})^n$

$= C\rho^n (e^{i\theta})^n + \bar{C}\rho^n (e^{-i\theta})^n = C\rho^n e^{in\theta} + \bar{C}\rho^n e^{-in\theta}$

$C = A + iB$

$= (A+iB)\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + (A-iB)\rho^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$

$i^2 = -1$

$= A\rho^n \cos n\theta - B\rho^n \sin n\theta + A\rho^n \cos n\theta - B\rho^n \sin n\theta + i\underbrace{(\ldots\ldots)}_{=0,\text{ siden reell}}$

$= 2A\rho^n \cos n\theta - 2B\rho^n \sin n\theta$. Sett $E = 2A, F = -2B$:

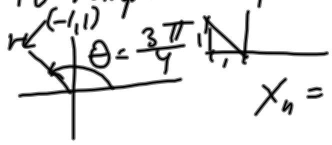
$= \underline{\underline{E\rho^n \cos n\theta + F\rho^n \sin n\theta}}$

Eks 4.1.15 $\quad x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

To komplekse røtter. Sett $r = -1 + i$ $\quad \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$.



$$x_n = E\rho^n \cos n\theta + F\rho^n \sin n\theta = \underline{E(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + F(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n3\pi}{4}\right)}$$

Initialbetingelser: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$:

sett inn $n=0$: $E\rho^0 \cos 0 + F\rho^0 \sin 0 = \underline{E = 1}$

$n = 1$: $E\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + F\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = E\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + F\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F - E = 2$

$\Rightarrow F = E + 2 = 1 + 2 = 3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + 3(\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)}}$$

Seksjon 4.2. Anta vi har 10.mill i banken, 6% rente
Utbetaler 500.000 kr på slutten av hvert år.
X_n = beløp på konto etter n år.

$$X_{n+1} = 1.06X_n - 0.5 \qquad X_0 = 10$$

$$X_{n+1} - 1.06X_n = -0.5 \qquad X_0 = 10$$

Dette er et eksempel på det vi kaller en inhomogen, førsteordens differenslikning (ikke 0 på høyresiden)

mer generell førsteordens likning: $X_{n+1} + aX_n = f(n)$
andreordens likning: $X_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = f(n)$ (*)

Vi skriver X_n^p for en (partikulær) løsning av denne,
X_n^h løsning av den homogene likningen $X_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = 0$.

Lemma 4.2.1: Hvis X_n^p løser (*), så kan enhver annen løsning av (*) skrives som $X_n = X_n^p + X_n^h$, der X_n^h løser den homogene likningen.

Vi vet hvordan vi finner X_n^h. Hvordan finner vi X_n^p?

For å finne x_n^p prøver vi oss frem på forskjellige måter, avhengig av hva høyresiden $f(n)$ er.

1. Hvis $f(n)$ er et polynom: Prøv å finne en x_n^p som har samme grad som f.
   Noen ganger må vi prøve for x_n^p et polynom som har en grad større enn f, (skjer når $x_n=1$ løser homogen likning
   eller et polynom som er to grader større enn f.
   (skjer når både $\underline{x_n=1}$ og $\underline{x_n=n}$ løser homogen likning)