4.2 i Kalkulus. Inhomogene differenslikninger.

$X_{n+1} - 1.06X_n = -0.5$, $X_0 = 10$ (innskudd i bank, fast rente, fast uttak.

I går: Regler for å finne X_n^p (partikulær løsning)

Vi prøver $X_n^p = a$ (generelt polynom av samme grad som HS)

$X_{n+1} - 1.06X_n = -0.5 \Rightarrow a - 1.06a = -0.5 \Rightarrow -0.06a = -0.5$

$a = \frac{0.5}{0.06} = \frac{25}{3}$

homogen likning $X_{n+1} - 1.06X_n = 0$ har generell løsning $X_n^h = C(1.06)^n$

$r - 1.06 = 0$

generelle løsningen på inhomogen likning $= X_n = X_n^h + X_n^p = \frac{25}{3} + C(1.06)^n$

$X_0 = 10 \Rightarrow 10 = \frac{25}{3} + C(1.06)^0 \Rightarrow C = 10 - \frac{25}{3} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow X_n = \frac{25}{3} + \frac{5}{3}(1.06)^n$

Eks 4.2.5 $\quad x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = n - 3$

Vi gjetter på $x_n^p = An + B$

$$x_{n+2}^p + x_{n+1}^p - 2x_n^p = \underbrace{A(n+2)+B}_{x_{n+2}^p} + \underbrace{A(n+1)+B}_{x_{n+1}^p} - 2\underbrace{(An+B)}_{x_n^p}$$

$$= An + 2A + B + An + A + B - 2An - 2B$$

$$= 3A \neq n - 3$$

Derfor finnes det ingen løsning $x_n^p = An + B$

Ser her at $x_n = 1$ løser den homogene likningen $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$

$1 + 1 - 2 = 0$

så regelen fra boka sier at vi må "gå opp en grad":

dropp å ta med konstantledd

$x_n^p = An^2 + Bn$:

$$x_{n+2}^p + x_{n+1}^p - 2x_n^p = \underbrace{A(n+2)^2 + B(n+2)}_{x_{n+2}^p} + \underbrace{A(n+1)^2 + B(n+1)}_{x_{n+1}^p} - 2(An^2 + Bn)$$

$$= A(n^2 + 4n + 4) + B(n+2) + A(n^2 + 2n + 1) + B(n+1) - 2An^2 - 2Bn$$

$$= (A + A - 2A)n^2 + (4A + B + 2A + B - 2B)n + 4A + 2B + A + B$$

$$= (6A)n + 5A + 3B = n - 3$$

$$\Rightarrow 6A = 1, \quad 5A + 3B = -3$$

$$A = \frac{1}{6} \qquad 3B = -3 - 5A = -3 - \frac{5}{6} = -\frac{23}{6} \Rightarrow \underline{B = -\frac{23}{18}}$$

$$\Rightarrow x_n^p = An^2 + Bn = \underline{\frac{1}{6}n^2 - \frac{23}{18}n}$$

homogen: $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0 \qquad r^2 + r - 2 \qquad r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow r = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\Rightarrow r = 1$ eller $r = -2$

generell løsning av homogen: $x_n^h = C(1)^n + D(-2)^n = C + D(-2)^n$

generell løsning av inhomogen: $x_n = x_n^h + x_n^p = \underline{\underline{C + D(-2)^n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{23}{18}n}}$

Eks 4.2.6 $\quad x_{n+2} - 2x_{n+1} + 3x_n = n2^n$

regel: ~~prøv~~ med $x_n^p = (An+B)2^n$

$$x_{n+2}^p - 2x_{n+1}^p + 3x_n^p = \underbrace{(A(n+2)+B)2^{n+2}}_{x_{n+2}^p} - 2\underbrace{(A(n+1)+B)2^{n+1}}_{x_{n+1}^p} + 3\underbrace{(An+B)2^n}_{x_n^p}$$

$$= 2^n\left((\underline{An}+2A+B)4 - 4(\underline{An}+A+B) + \underline{3An}+3B\right)$$

$$= 2^n\left((4A-4A+3A)n + 8A+4B-4A-4B+3B\right)$$

$$= \underline{2^n}(3An + 4A + 3B) = \underline{3A}\, n2^n + (4A+3B)2^n = n2^n$$

Vi må da ha at: $\quad 3A = 1, \quad 4A+3B = 0$

del med 3

$\underline{A = \frac{1}{3}} \qquad 3B = -4A = -\frac{4}{3} \Rightarrow B = \underline{-\frac{4}{9}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_n^p = (\overset{A}{\frac{1}{3}}n - \overset{B}{\frac{4}{9}})2^n}}$$

homogen likning: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 3x_n = 0 \qquad r^2 - 2r + 3 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}i$$

Generell løsning $= x_n = x_n^h + x_n^p = C(r)^n + \overline{C}(\overline{r})^n + x_n^p$

$$= \underline{\underline{C(1+\sqrt{2}i)^n + \overline{C}(1-\sqrt{2}i)^n + (\tfrac{1}{3}n - \tfrac{4}{9})2^n}}$$

evt $\underline{E\rho^n\cos(n\theta) + F\rho^n\sin(n\theta)}$

$(\rho = |r| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

Eks 4.1.11 homogen, en reell rot.

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \qquad r^2 - 4r + 4 = 0 \quad , r = 2 \text{ er eneste rot}$$

generell løsning: $\underline{x_n = C\,2^n + Dn2^n}$

$x_0 = 1 \qquad 1 = C + 0 \Rightarrow C = 1$

$x_1 = 8 \qquad 8 = 2C + 2D \Rightarrow 2D = 8 - 2C = 6 \Rightarrow \underline{D = 3}$

$\Rightarrow$ spesiell løsning $\underline{\underline{x_n = 2^n + 3n2^n}}$

i Kalkulus: Ser også på $b^n (A \sin(an) + B\cos(an))$ som høyreside.

Kompendiet kap. 6

def 6.4

en generell differenslikning skrives som

$$X_{n+k} = f(n, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1})$$

Denne sies å ha orden k.

Kalkulus: $X_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = f(n)$

Kompendiet: $X_{n+2} = \underbrace{f(n) - bX_{n+1} - cX_n}_{f(n, X_n, X_{n+1})}$ initialverdier $X_0 = a_0$, $X_1 = a_1$, $\vdots$, $a_k = a_k$

Def 6.7 Likningen

$$X_{n+k} = g(n) + f_0(n)X_n + f_1(n)X_{n+1} + \dots + f_{k-1}(n)X_{n+k-1}$$

kalles en inhomogen <u>lineær</u> differenslikning av orden k

I kalkulus: alle $f_0(n), f_1(n) \dots$ er konstanter

(lineære differenslikninger med <u>konstante</u> koeffisienter)

Obs. 6.8:

To måter å løse differenslikning på:

1. Simulere på PC eller kalkulator $X_{n+k} = f(n, X_n, X_{n+1}, \dots)$
2. Løse matematisk (se Kalkulus) lineær, inhomogen, orden 2.

Algoritme 6.10

$X_0 = a_0;$

$X_1 = a_1;$

for $i = 2, 3, \dots, N$

$\quad X_i = g(i-2) + f_0(i-2)X_{i-2} + f_1(i-1)X_{i-1}$

Vi prøver med Fibonacci:

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$$

Algoritme 6.11

$Xpp = a_0;$

$X_p = a_1;$

for $i = 2, 3, \dots, N$

$\quad X = g(i-2) + f_0(i-2)X_{pp} + f_1(i-1)X_p$

$\quad$ print X;

$\quad X_{pp} = X_p;$

$\quad X_p = X;$

(Fordel: Lagrer ikke hele følgen X_i)