Differensligninger

Generell differensligning:

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-k$$

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots, \quad x_{k-1} = a_{k-1}$$

Eks. 6.27

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 8/3$$

$$x_{n+2} = -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n \quad (\#)$$

I dette tilfellet er $f(n, x_n, x_{n+1})$

$$= -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n$$

Programmering. For å regne ut et ledd trenger vi de to foregående.

$$\quad \quad x_{pp} \quad x_p \quad x$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots \quad - \quad -$$

Hvis vi løser ligningen:

Kar pol.

$$r^2 - \frac{19}{3} r + 2 = 0$$

$$r_1 = 1/3 \ , \quad r_2 = 6$$

Prøver med $x_n^p = A$ og får $A = 3$.

Gen. løsning $x_n = 3 + C\, 3^{-n} + D\, 6^n$

$x_0 = 2$ og $x_1 = 8/3$ gir

$$x_n = 3 - 3^{-n}$$

Vi ser at $\lim_{n \to \infty} x_n = 3$.

Forklaring på regnefeil

Vi har $x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10$, $x_0 = 2$, $x_1 = 8/3$

$19/3$ og $8/3$ kan ikke representeres eksakt.
Det betyr at ligningen vi simulerer
er

$$x_{n+2} - \left(\frac{19}{3} + \delta\right) x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2$$

der δ og ε er omtrent 10^{-17} $\quad x_1 = 8/3 + \varepsilon$

δ er ikke kritisk – fører ikke til stor feil så vi kan like godt anta at $\delta = 0$.
Derfor er ligningen vi må se på

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3 + \varepsilon$$

Løsning $x_n = 3 + C\,3^{-n} + D\,6^n$ $\qquad \hat{\varepsilon} = \frac{3\varepsilon}{17}$

Vi får nå fra $x_0 = 2$, $x_1 = 8/3 + \varepsilon$

$$C = -1 + \hat{\varepsilon}, \quad D = \hat{\varepsilon}, \quad |\hat{\varepsilon}| \approx 10^{-17}$$

Altså $\boxed{x_n = 3 + (-1 + \hat{\varepsilon})\,3^{-n} + \hat{\varepsilon}\,6^n}$

$$\left.\begin{aligned} 2 = x_0 &= 3 + C + D \\ \frac{8}{3} + \varepsilon = x_1 &= 3 + \frac{C}{3} + 6D \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} C + D &= -1 \\ C/3 + 6D &= -\frac{1}{3} + \varepsilon \end{aligned}$$

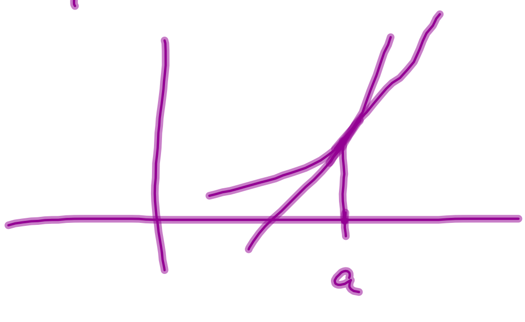
$$C = -1 + \frac{3\varepsilon}{17}, \quad D = \frac{3\varepsilon}{17} \quad \hat{\varepsilon}$$

Taylorpolynomer kap 11. i Kalkulus

I mange sammenhenger er det nyttig å kunne tilnærme en komplisert funksjon med en enkel funksjon.
Her skal vi tilnærme med polynomer.

Eks. Tangenten til f i a.
Formel for tangenten

$$T_1 f(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$$



Taylorpolynomer av høyere grad.

Grad 2. Ønsker å finne et polynom $g(x)$ av grad 2 slik at

$$g(a) = f(a)$$
$$g'(a) = f'(a)$$
$$g''(a) = f''(a)$$

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)$$

$$g''(x) = 2c_2$$

$$g(a) = \boxed{c_0 = f(a)}$$

$$g'(a) = \boxed{c_1 = f'(a)}$$

$$g''(a) = 2c_2 = f''(a)$$

$$c_2 = f''(a)/2$$

Altså $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

Generelt. Ønsker polynom g av grad n slik at $g(a) = f(a)$, $g'(a) = f'(a)$, $g''(a) = f''(a)$, $g'''(a) = f'''(a)$, ------, $g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Løsning

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Ex. $f(x) = \sin x$, $a=0$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$