Differensligninger i komp.

1. Generelle differensligninger, hva er det?

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})$$

2. Simulering av differensligninger

3. Effekt av avrundingsfeil, Ex. 6.27

Taylor polynomer.

Kalkulus kap. 11.

Setning 11.1.1. Polynomet

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

har samme verdi og n første deriverte som f i a. Forutsetning: De deriverte i a må eksistere.

Ex. $f(x) = e^x$, $a = 0$

$$P_n(x) = T_n(f(x)) = T_n(e^x)$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Husk at $f^{(k)}(x) = e^x$, $k \geq 0$

$$f^{(k)}(0) = 1$$

$$T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Ex 2. $f(x) = \sin x$, $a = 0$ $\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right.$

Må finne $f^{(n)}(0)$.

Partallsderiverte er 0

Oddetalls deriverte er

1 og -1 annenhver gang

$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$, $f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x$, $f^{IV}(0) = 0$

Gjentar seg

$P_n(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$$T_{2n-1}(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$= T_{2n}(\sin x)$$

Ex. $f(x) = \cos x$. $a = 0$

$$T_{2n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = T_{2n+1}(\cos x)$$

Sammenheng mellom Taylor om a=0

for e^x, $\sin x$, $\cos x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Hva er feilen i et Taylorpolynom?

Vi ønsker å finne en "pen" formel for feilen.

La f være gitt og la $T_n f$ være Taylorpolynomet. Feilen: $R_n f = f - T_n f$

Fra integralregning

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

Sett $b = x$.

$$f(x) = \overset{T_0 f}{f(a)} + \overset{R_0 f}{\int_a^x f'(t)\,dt}$$

Har $f(b) = f(a) + \int_a^b 1 \cdot f'(t)\,dt$ $\quad (*)$

Delvis integrasjon i integralet.

$u = f'(t)$, $v' = 1$, $v = t - b$ $\qquad \boxed{\int u v' = uv - \int u' v}$

$$\int_a^b \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{f'(t)}_{u}\,dt = \Big[f'(t)(t-b)\Big]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= -f'(a)(a-b) - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

Setter inn i $(*)$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

Sett $b = x$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{T_1 f} + \underbrace{\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt}_{R_1 f}$$

Hvis vi delvis integrerer $R_1 f$ på samme måte får vi $T_2 f$

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2}^{T_2 f}$$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2\,dt}_{R_2 f}$$

Delvis integrasjon n ganger gir:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

$$R_n f = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$ – feilen i Taylor

Alternativ form:

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \in (a, x)$$
(avhenger av x).

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Ex. Anta at vi ønsker å beregne e med feil mindre enn 10^{-3} på en kalkulator som ikke har e^x.

La $f(x) = e^x$, $a = 0$

$$T_n f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$e \approx T_n f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}$$