Taylorpolynomer:

Gitt f så er Taylorpolynomet til f om a av grad n gitt ved

$$T_n f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

Feilen er gitt ved

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (a, x)$$

Ex: $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$

$$f^{(n)}(x) = n!\, c_n$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

Altså er $R_n f(x) = 0$ i dette tilfellet.

Beregning av e

Anta at vi ønsker å regne ut e med feil mindre enn 10^{-3} på en kalkulator uten e^x.

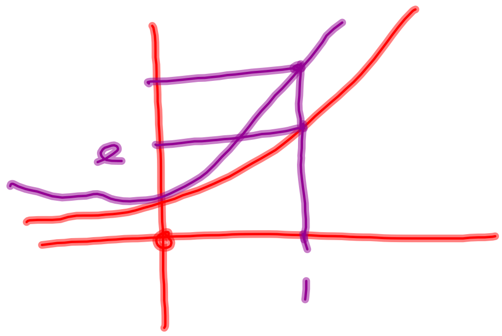
Ønsker å bruke Taylorpolynom av naturlig grad.

$$T_n f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Vi har nå $f(x) = e^x$ og $a = 0$.

$$e \approx T_n f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

siden $f^{(k)}(x) = e^x$ for alle k.



Estimat av feil

Vi vet at feilen er gitt ved

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c).$$

Vi vet $a=0$, $f(x)=e^x$, $c \in (0,x)$

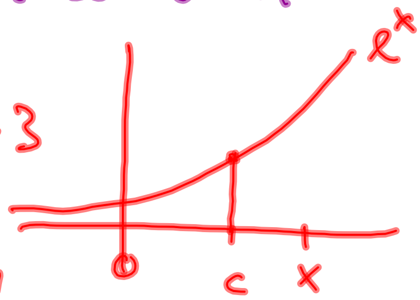
$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^c, \quad c \in (0,x)$$

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^c \right| \le \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} e^x$$

siden e^c vokser og blir størst når c oppnår største tillatte verdi

Altså er

$$|R_n f(1)| \le \frac{1}{(n+1)!} e^1 < \frac{1}{(n+1)!} \cdot 3$$



Hvis vi finner minste n slik at $\boxed{\frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-3}}$ er garantert feilen vi gjør ved å tilnærme e med $1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n!}$ mindre enn eller lik 10^{-3}.

Vi sjekker: Svar: $n=6$, Siden

$$\frac{3}{7!} \approx 0{,}00059$$

Ex 11.2.? Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil mindre enn 10^{-4}.

Strategi: Erstatt $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad n og integrer dette.

Spørsmål: Hvor stor må n være?

Må analysere feilledd.

Vi har $f(x) = \sin x$, $a = 0$

$$\overset{\sin x}{f(x)} = \overset{T_{2n}\sin x}{T_{2n} f(x)} + \overset{R_{2n}\sin x}{R_{2n} f(x)}$$

$$T_{2n} f(x) = T_{2n}\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$R_{2n} f(x) = \frac{f^{(2n+1)}(c)\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c \in (0, x)$$

Vi gjør følgende:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_{2n} f(x) + R_{2n} f(x)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{T_{2n} f(x)\,dx}{x} + \int_0^1 \frac{R_{2n} f(x)\,dx}{x}$$

Feil i integralet:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{T_{2n} f(x)\,dx}{x} = \int_0^1 \frac{R_{2n} f(x)\,dx}{x}$$

Merk at

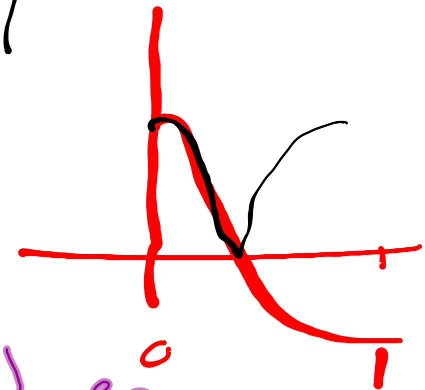
$$\frac{T_{2n} f(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{x}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

Feil $\left| \int_0^1 \frac{R_{2n} f(x)}{x} dx \right|$. $f(x) = \sin x$, $a = 0$

$$\left| \int_0^1 \frac{R_{2n} f(x)}{x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{R_{2n} f(x)}{x} \right| dx$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{D^{2n+1}(\sin t)_{t=c}\, x^{2n+1}}{x(2n+1)!} \right| dx$$



$$\leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x(2n+1)!} dx$$

siden $D^{2n+1}(\sin t)$ er enten sin eller cos og $|\sin x| \leq 1$ for alle x, $|\cos x| \leq 1$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \Big|_0^1 \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}$$

Finn minste n slik at dette blir mindre enn 10^{-4}. Da er garantert feilen i integralet mindre enn 10^{-4}. **Svar: $n = 3$**