Hva betyr $(a-b)/c - 1$?

i) $\dfrac{a-b}{c} - 1$ ✓

ii) $\dfrac{a-b}{c-1}$

Polynom interpolasjon. Kap 9 i komp.

Taylorpolynomet til f av grad n konstrueres ved å kreve at f og P_n har samme deriverte $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Alternativ: Finn en polynomtilnærming som har samme funksjonsverdi som f i isolerte punkter.

Gitt $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $x_i \in [a, b]$

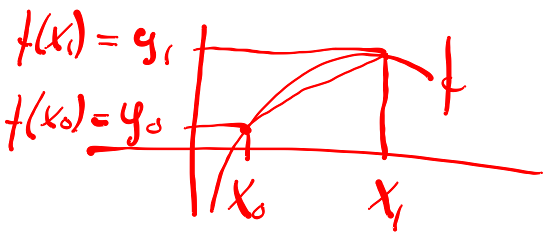
Finn P_n slik at

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

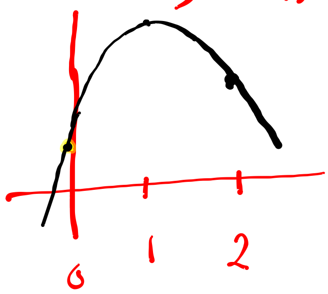
Ofte er $f(x_i) = y_i$ gitte tall (måleverdier)

Eks 1, Sekant

$$P_1(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$



Eks 2. Finn p slik at $p(0)=1$, $p(1)=3$, $p(2)=2$



Vi prøver med

$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Vi har

$1 = p(0) = c_0$

$3 = p(1) = c_0 + c_1 + c_2 \qquad c_1 + c_2 = 3 - c_0 = 2$

$2 = p(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2. \qquad 2c_1 + 4c_2 = 2 - c_0 = 1$

Løsning $c_1 = 7/2$, $c_2 = -3/2$, $c_0 = 1$

Derfor $p(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$

Utfordring: Å bestemme interpolasjonspolynom på en systematisk måte for store n.

Generelt er det lett å skrive P_n på formen

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

(Punktene $(x_i, f(x_i))_{i=0}^{n}$ er gitt.

Eksempel $n=2$ på nytt.

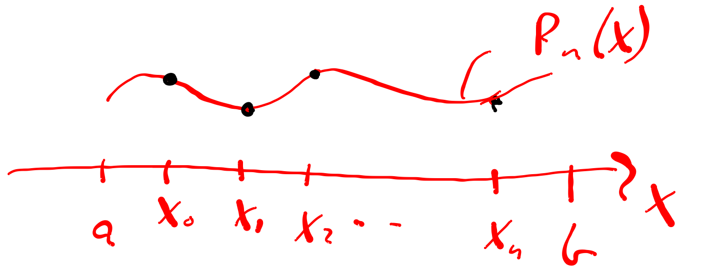
$P(0)=1$, $P(1)=3$, $P(2)=2$

$x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$

$f(x_0)=y_0=1$,

$f(x_1)=y_1=3$

$f(x_2)=y_2=2$



$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$$

Betingelser

$$\left.\begin{aligned} 1 &= P(0) = c_0 \\ 3 &= P(1) = c_0 + c_1 \\ 2 &= P(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 3 - c_0 = 2 \\ 2c_2 &= 2-1-4 = -3 \\ c_2 &= -3/2 \end{aligned}$$

$$P(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$
$$= 1 + \underbrace{\left(2+\frac{3}{2}\right)}_{7/2}x - \frac{3}{2}x^2$$

I stedet fikk vi

$$P(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Newton form av interpolasjonspolynomet

Gitt $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $x_i \in [a,b]$

så er Newtonformen gitt ved

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots$$
$$+ c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})$$

Eks. $n=0$, $P_0(x) = c_0$, $c_0 = P_0(x_0) = f(x_0)$

$P_0(x) = f(x_0)$

$n=1$, $P_1(x) = c_0 + c_1(x-x_0)$, $P_1(x_0) = f(x_0)$
$P_1(x_1) = f(x_1)$

$f(x_0) = P(x_0) = c_0$

$f(x_1) = P(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$n=2$ $\quad P_2(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1)$

$P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2(x_1) = f(x_1)$, $P_2(x_2) = f(x_2)$

$f(x_0) = P_2(x_0) = c_0$

$f(x_1) = P_2(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$

$f(x_2) = P_2(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

Løsning $\quad c_0 = f(x_0)$, $c_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$$c_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Generelt :

$$c_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$ – divident differanse av orden k.

- c_k avhenger kun av $x_0, \dots, x_k$.

Dessuten

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$f[x_0] = f(x_0)$$

Dividert differense tabell

x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$