Interpolasjon, kap 9 i komp.

Gitt $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ finn et polynom p_n av grad n slik at

$$p_n(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ofte er $y_i = f(x_i)$ for en eller annen f.

Newton formen for p_n

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Når vi da forsøker å bestemme c_i'ene fra betingelsene $p_n(x_i) = y_i$ går regningen veldig lett.

Vi fant at $c_i = f[x_0, \ldots, x_i]$ hvis $y_i = f(x_i)$

Vi har at

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$f[x_0] = f(x_0)$$

Divident differens tabell.

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$f[x_0] = f(x_0)$

Eks. $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,2)$

x	$f(x)$			
0	0			
1	1	1		
2	1	0	$-1/2$	
3	2	1	$1/2$	$1/3$

Altså er $P_3(x) = 0 + 1\,(x-x_0) - \frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1)$
$+ \frac{1}{3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$= x - \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$

Magisk formel

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

der $\xi \in (\min x_i, \max x_i)$

Temaer framover

Numerisk løsning av ligninger, kap 10 i komp.

Numerisk derivasjon, kap 11

Numerisk integrasjon, kap 12

Numerisk løsning av differensiallign. Kap 13.

Numerisk løsning kontra analytisk løsning.

Numeriske metoder kan brukes på generelle problemer, analytiske metoder kan bare brukes på spesialtilfeller.

Numerikk: En fryktelig enkel ide som leder til en algoritme.

Numerisk løsning av ligninger

Gitt funksjon f, finn $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$.

Dukker ofte opp som del av et større problem.

Vi skal se på tre metoder:

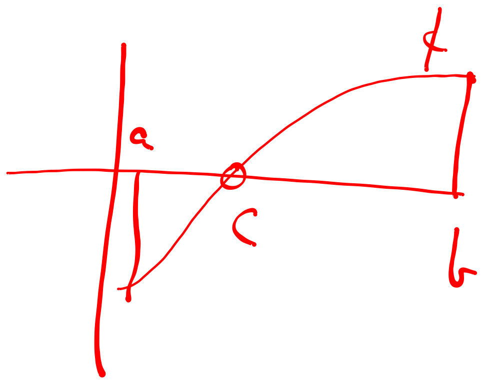
Halveringsmetoden
Sekant metoden
Newtons metode

Alle basert på svært enkle ideer.

Halveringsmetoden.

Utgangspunkt i skjæringssetningen:

Anta at f er kontinuerlig på $[a,b]$ med motsatt fortegn i a og i b. Da fins det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c)=0$.



Strategi for å finne c.

Gjett på midtpunktet $m_0 = (a+b)/2$.

Enten er $f(m_0) = 0$

eller så har f et nullpkt i (a, m_0)

eller (m_0, b)

Algoritme

$a_0 = a;\quad b_0 = b;$

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$\quad m_{i-1} = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$

$\quad$ if $f(m_{i-1}) == 0$

$\qquad a_i = b_i = m_{i-1}$ $\quad$ fremme !!

$\quad$ if $f(a_{i-1}) \cdot f(m_{i-1}) < 0$

$\qquad a_i = a_{i-1};\quad b_i = m_{i-1}$

$\quad$ else

$\qquad a_i = m_{i-1};\quad b_i = b_{i-1}$

$m_N = (a_N + b_N)/2$