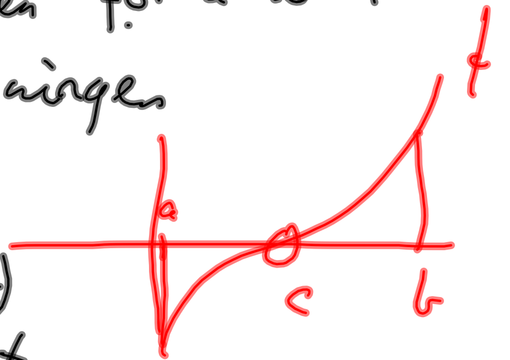
Numerisk løsning av ligninger med halveringsmetoden

Ide bak halveringsmetoden for å løse $f(x)=0$

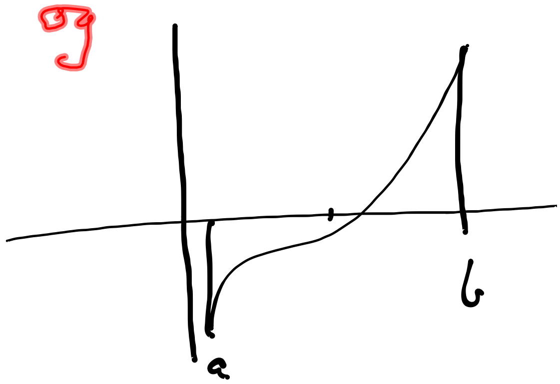
Basert på skjæringssetningen

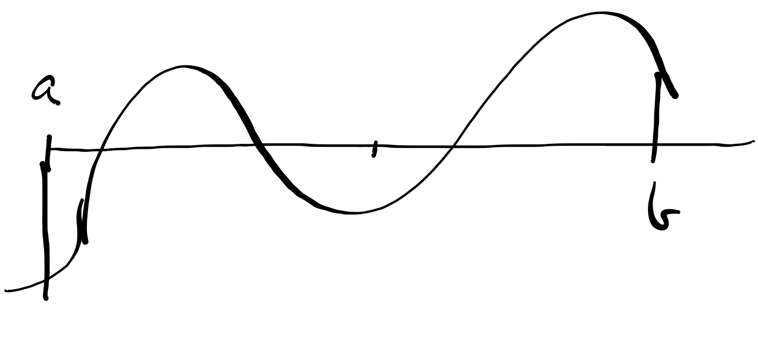


Hvis $f(a)f(b)<0$ så må det være en $c \in (a,b)$ slik at $f(c)=0$, så sant f er kontinuerlig

Ide bak halveringsmetoden:

Gjett på midtpunktet og del opp.





Algoritme for halveringsmetoden

f og a, b med $f(a) \cdot f(b) < 0$ er gitt.

$\cancel{a_0 = a}$; $\cancel{b_0 = b}$

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$\quad \overset{m}{m_{i-1}} = (\overset{a}{a_{i-1}} + \overset{b}{b_{i-1}})/2$

$\quad$ if $f(\overset{m}{m_{i-1}}) == 0$

$\quad\quad \overset{a}{a_i} = \overset{b}{b_i} = \overset{m}{m_{i-1}}$

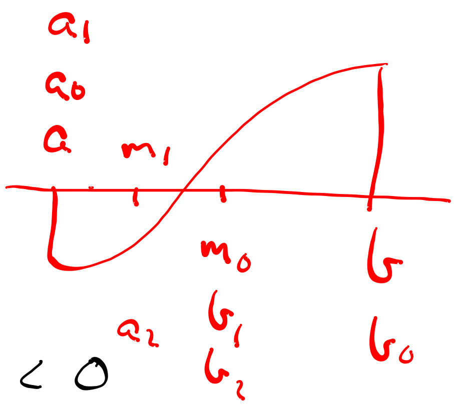
$\quad$ else if $f(\overset{a}{a_{i-1}})\, f(\overset{m}{m_{i-1}}) < 0$

$\quad\quad \overset{a}{a_i} = \overset{a}{a_{i-1}}$; $\overset{b}{b_i} = \overset{m}{m_{i-1}}$

$\quad$ else

$\quad\quad \overset{a}{a_i} = \overset{m}{m_{i-1}}$; $\overset{b}{b_i} = \overset{b}{b_{i-1}}$

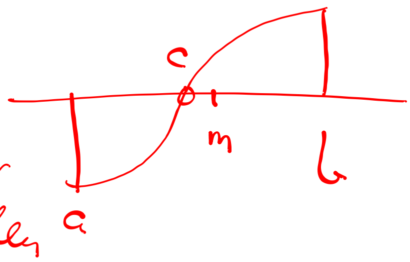
$\overset{m}{m_N} = (\overset{a}{a_N} + \overset{b}{b_N})/2$



Feil i halveringsmetoden

Anta at $f(a)f(b) < 0$ slik at vi vet at det er et nullpkt c i (a,b). Hvis vi bruker midtpkt. m som estimat for c, hva er den størst mulige feilen?

$$|c-m| \le \frac{b-a}{2}$$



Etter N oppdelinger er intervall bredden

$$\frac{b-a}{2^N}$$ og

$$|c-m| \le \frac{b-a}{2^{N+1}}$$

Anta at vi ønsker å finne nullpkt. med feil mindre enn ε. Da må vi velge N slik at

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} \le \varepsilon$$

ln nå begge sider:

$$\ln(b-a) - \ln(2^{N+1}) \le \ln \varepsilon$$

$$\ln(b-a) - (N+1)\ln 2 \le \ln \varepsilon$$

$$N \ge \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Halveringsmetoden gir en følge $\{m_i\}$ av midtpunkter som konvergerer mot nullpunktet c.

$$\lim_{i \to \infty} m_i = c.$$

Absolutt feil etter i oppdelinger

$$|m_i - c| \leq \frac{b-a}{2^{i+1}}$$

Relativ feil

$$\frac{|m_i - c|}{|c|} \leq \frac{|b-a|}{2^{i+1}|c|} \approx \frac{|b-a|}{2^{i+1}|m_i|}$$

For $i = 1, 2, \ldots, N$ i algoritmen kan da erstattes med

while $i \leq N$ and $\frac{|b-a|}{2^{i+1}|m|} \leq \varepsilon$

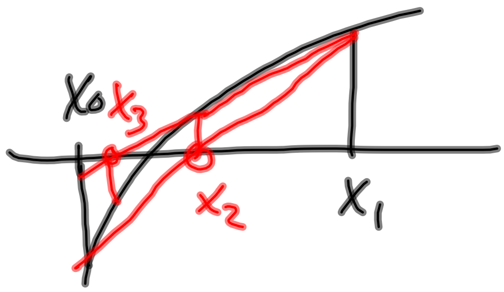
Bedre

while $i \leq N$ and $\frac{|b-a|}{2^{i+1}} \leq \varepsilon \cdot |m|$

Sekantmetoden.

f er gitt og to punkter x_0, x_1

Ide bruk sekanten mellom x_0 og x_1 som tilnærming til f og nullpkt. til sekanten som tilnærming til nullpkt til f.



Formel for sekanten.

$$s(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$s(x)=0 \Rightarrow x^* = x_2 - \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} f(x_2)$$

<u>Algoritme</u>

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}-x_{i-2}}{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})} f(x_{i-1}), \quad i=2,3,\ldots$$

Eks der sekantmetoden svikter:

Newtons metode

Gitt f og ett punkt x_0.

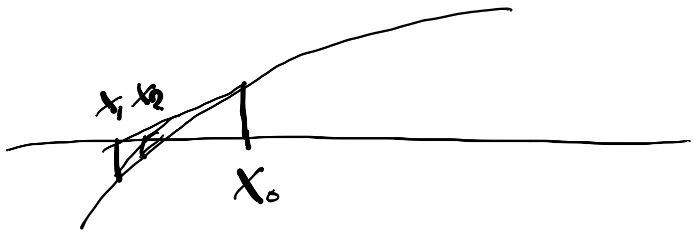
Ide. Bruk tangenten i x_0 som tilnærming til f og nullpkt. til tangenten som tilnærming til nullpkt. til f.

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Algoritme:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \ldots$$



Konklusjon

Halveringsmetoden: Alltid OK
Trenger iterasjoner ~~ett~~
Ett bit pr. iterasjon.

Sekantmetoden. Funker ikke alltid.
Får 60 % flere riktige
siffer pr. iterasjon.
når det funker

Newton: Funker ikke alltid.
Dobler antall riktige siffer
pr. iterasjon når den funker.