Nullpunkter

Halveringsmetoden

$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} e_n$

Sekantmetoden

$e_{n+1} \approx C_1 e_n^r$, $r = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
$\approx 1,6$

Newtons metode

$e_{n+1} \approx C_2 e_n^2$

La $e_n = |x_n - c|$
være feilen i
n'te iterasjon

Eks på feilutvikling

$e_n = 10^{-10}$

H: $e_{n+1} \approx \frac{1}{2} 10^{-10}$

S: $e_{n+1} \approx 10^{-16}$

N: $e_{n+1} \approx 10^{-20}$

Numerisk derivasjon

Hvordan kan vi derivere en funksjon som bare er kjent i noen få punkter?

Def av derivert:

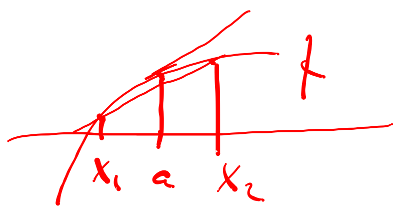
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Opplagt idé: $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h > 0$

Eks. Gitt $f(x_1)$ og $f(x_2)$, bruk

$$f'(x) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2]$$

Vi har tilnærmet f med en sekant og bruker den deriverte av sekanten som tilnærming til den deriverte til f.



Test: $f(x) = \sin x$,

$a = 0.5$

$f'(x) = \cos x$, $f'(a) = \cos 0.5$

Feil estimat

Fra Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h) \quad \xi_h \in (a, a+h)$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_h)$$

$$\approx -\frac{h}{2} f''(a)$$

hvis f'' er "snill".

Kan utlede

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|.$$

Avrundingsfeil

Feilen avtar med h, men når h blir mindre enn ca 10^{-10} øker feilen med h.

Forklaring:

Vi får vanligvis ikke verdien $f(a)$ eksakt, men det nærmeste flyttallet $\overline{f(a)}$. Maks relativ feil er $5 \cdot 2^{-53}$. Hvis

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{f(a)} - f(a)}{f(a)} \qquad \overline{f'(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1)$$

Så er $|\varepsilon_1| \leq 5 \cdot 2^{-53} \approx 6 \cdot 10^{-16}$

Vi regner med verdiene $\overline{f(a)}$

og $\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2)$

Total feil:

$$f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h}$$

$$= -\frac{h}{2} f''(\xi_h) - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$