Fra i går: Utledet matematisk feil / avrundingsfeil ved tilnærming til den deriverte (Newtonkvotienten):

$$\left|f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h}\right| = \Big|\underbrace{-\frac{h}{2}f''(\xi_h)}_{\text{matematisk feil}} - \underbrace{\frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}}_{\text{avrundingsfeil}}\Big|$$

$|a_1+a_2+a_3| \le |a_1|+|a_2|+|a_3|$

$$\le \left|\frac{h}{2}f''(\xi_h)\right| + \frac{|f(a+h)||\varepsilon_2|}{h} + \frac{|f(a)||\varepsilon_1|}{h}$$

$$\le \frac{h}{2}M_1 + \frac{M_2\varepsilon^*}{h} + \frac{M_2\varepsilon^*}{h}$$

$$= \frac{h}{2}M_1 + \frac{2\varepsilon^*}{h}M_2$$

$$\approx \frac{h}{2}|f''(a)| + \frac{2\varepsilon^*}{h}|f(a)|$$

For å finne optimal h (dvs. minst feil), deriver denne, og sett lik 0.

$$\frac{1}{2}|f''(a)| - \frac{2\varepsilon^*}{h^2}|f(a)| = 0$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \underline{\underline{h = 2\sqrt{\frac{\varepsilon^*|f(a)|}{|f''(a)|}}}}$$

ε^*: største relative feil vi gjør ved å erstatte med normerte flyttall.

Spesielt: $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \le \varepsilon^*$

$\varepsilon^* \approx 7\times 10^{-17}$

La også $M_1 = \max_{x\in[a,a+h]} |f''(x)|$

$M_2 = \max_{x\in[a,a+h]} |f(x)|$

for h liten:

$M_1 \approx |f''(a)|$

$M_2 \approx |f(a)|$

Tilbake til eks. 11.12: $f(x) = \sin x \qquad a = 0.5$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow \text{optimal } h = 2\sqrt{\frac{\varepsilon^*|\sin 0.5|}{|-\sin 0.5|}}$$

$$= 2\sqrt{\varepsilon^*} = 2\sqrt{7\times10^{-17}} \approx 1.6733\times 10^{-8} \approx \underline{10^{-8}}$$

11.2 Generell strategi for å tilnærme den deriverte:

1. Interpolere f i punktene vi har valgt, med et polynom.
(Velger vi punktene $a, a+h$ som i sek. 11.1, blir polynomet:

$$p_1(x) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a) + f(a) \quad \text{(linje)}$$

2. Tilnærm den deriverte ved å regne ut den deriverte av polynomet i a (i sek. 11.1: $p_1'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ | $f'(a) \approx p_1'(a)$)

3/4: Utled feilestimater "ved hjelp av Taylorutviklinger"

11.3 Tilnærm $f'(a)$ ved å interpolere f i $a-h$, a, $a+h$

$$p_2(x) = f[a-h] + f[a-h,a](x-(a-h)) + f[a-h,a,a+h](x-(a-h))(x-a)$$

(= newtonformen til det interpolerende polynom)

$$p_2'(x) = f[a-h,a] + f[a-h,a,a+h](2x-2a+h)$$

$$p_2'(a) = f[a-h,a] + f[a-h,a,a+h]h$$

$$= f[a-h,a] + \frac{f[a,a+h]-f[a-h,a]}{(a+h)-(a-h)}h = f[a-h,a] + \frac{1}{2}\left(f[a,a+h]-f[a-h,a]\right)$$

$$= \frac{f[a,a+h]+f[a-h,a]}{2} = \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$$

$$f[a,a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Denne kalles for den symmetriske Newton-kvotienten

Feilanalyse symmetrisk Newton: Vi Taylorutvikler f:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)^3$$

setter inn $x = a+h$, $a-h$:

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

Da blir:

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3 + \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) = \frac{f'''(\xi_1)}{12}h^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{12}h^2$$

hvis M_1 begr på $|f'''(x)|$:

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a)\right| \leq \frac{M_1}{12}h^2 + \frac{M_1}{12}h^2 = \frac{M_1}{6}h^2$$

poeng: denne går raskere mot 0, enn Newtonkvotientens matematiske feil.

Vi får et annet uttrykk nå for optimal steglengde.

11.4: firepunktsmetode for tilnærming av den deriverte.
interpolerer vi i x_0, x_1, x_2, x_3:

$$f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

i 11.4 velger vi $a-2h,\ a-h,\ a+h,\ a+2h$ for x_0, x_1, x_2, x_3

matematisk feil blir nå enda mindre ($\approx h^4$)

11.5: Man kan også utlede tilnærminger til den andrederiverte:

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

12.1 Numerisk integrasjon $\nearrow p$

samme strategi: 1. Finn polynom som interpolerer f i "passende punkter"

2. Integrer polynomet, dette blir vår tilnærming til integralet av f:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx$$

def 12.1 Partisjon av $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

uniform partisjon: $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

($[x_{i-1}, x_i]$ = i'te delintervall)

$$\underline{I} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

integrerbar: $\boxed{\sup \underline{I} = \inf \bar{I}}$ når intervallengdene $\to 0$

Teorem 12.3: når f er integrerbar, så vil

$\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ konvergere mot $\int_a^b f(x)\,dx$.

for <u>ethvert</u> valg av $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, så lenge avstandene mellom x_i-ene går mot 0.

Vi skal se på forskjellige strategier for valg av t_i

Seksjon 12.2 Her velger vi $t_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} x_{i-\frac{1}{2}}$,

dvs midtpunktet på i'te delintervall.

Metoden kalles derfor midtpunktsmetoden.

$$I_{mid}(h) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}})\,\overset{x_i - x_{i-1}}{h} = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \int_a^b f(x)\,dx.$$

Feilanalyse midtpunktsmetoden:

matematisk feil når vi bare bruker ett delintervall:

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \left(a_{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2}\right.$$

Taylorutvikler f om $a_{1/2}$:

$$f(x) = f(a_{\frac{1}{2}}) + f'(a_{\frac{1}{2}})(x-a_{\frac{1}{2}}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a_{1/2})^2$$

integrerer:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a_{\frac{1}{2}})\,dx + \underbrace{\int_a^b f'(a_{\frac{1}{2}})(x-a_{\frac{1}{2}})\,dx}_{0} + \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a_{\frac{1}{2}})^2\,dx$$

$$= (b-a) f(a_{\frac{1}{2}}) + \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a_{1/2})^2\,dx$$

$$\underbrace{\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f(a_{\frac{1}{2}})\right|}_{\text{matematisk feil ved midtpunktsmetoden.}} = \underbrace{\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a_{\frac{1}{2}})^2\,dx}_{\text{kan vise at } \le \frac{M}{24}(b-a)^3}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Mer generelt vises i boka:

Teo 12.8: Feilen med midtpunktsmetoden

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_{mid}(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

er begrenset med $\underline{\underline{|I - I_{mid}(h)| \le (b-a)\frac{h^2}{24}M}}$