Induksjon

Vi har tallfølgen gitt ved $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$

$x_0 = 0,\ x_1 = 1$

Vi får da at

$x_2 = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$\vdots$

Vis at $x_n \leq 1$ for alle $n \geq 0$.

(i) $x_0 = 0 < 1$, OK

(ii) Anta OK for $n=k$, vise OK for $n=k+1$.

OK for $n=k$ vil si at $x_k < 1$ – anta dette

Må vise OK for $n=k+1$, altså $x_{k+1} < 1$.

$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$.

Vi ser at vi må vite noe om både x_k og x_{k-1} for å vise at $x_{k+1} < 1$.

Nytt bevis:

(i) Vi har $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$, altså $x_0 \leq 1$, $x_1 \leq 1$

OK.

(ii) Anta ok for $n=k-1$, $n=k$, må vise OK for $n=k+1$.

Vi antar altså at $x_{k-1} \leq 1$, $x_k \leq 1$.

$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$ OK.

$x_{k+1} \leq 1$

Summetegn

Regler:

(i) $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$

$a_k + a_{k+1} + \dots + a_m + b_k + b_{k+1} + \dots + b_m$

$= a_k + b_k + a_{k+1} + b_{k+1} + \dots + a_m + b_m$

$= \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$

(ii) $\sum_{n=k}^{m} c \cdot a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n$

Bevis: $\sum_{n=k}^{m} c \cdot a_n = (c \cdot a_k + c \cdot a_{k+1} + \dots + c \cdot a_m)$

$= c\,(a_k + a_{k+1} + \dots + a_m)$

$= c \sum_{n=k}^{m} a_n$

(iii) $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n$

De to summene

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3} \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k$$

er like! Skal omforme den ~~siste~~ første til den ~~første~~ siste.

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}, \quad i = k+3, \quad k = i-3$$

$$= \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i.$$

Vi har $(-1)^{i-3} \cdot 1 = (-1)^{i-3}(-1)^4 = (-1)^{i+1}$

$$= \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i+1} x^i$$

$$= \sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k$$

Pascals trekant og binomialformelen.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$

$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Hva blir $(a+b)^n$?

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Vi ser på $(a+b)^4$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$$

$$= (a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$$

$$+ \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Vi ser at i $(a+b)^4$ får vi sum av ledd der eksponentene til a og b summerer seg til 4.

Hvis vi ser på $(a+b)^n$ må vi få sum av ledd der eksponentene på a og b summerer seg til n.

Utfordring: Koeffisientene!

Altså har vi
$$(a+b)^n = a^n + z_1 a^{n-1} b + z_2 a^{n-2} b^2 + \dots + z_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

I Pascals trekant er et tall lik summen av tallene rett over.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

Tallene i Pascals trekant er binomialkoeffisientene, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots n$

påstand:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \qquad 0! = 1$$

Må vise at vi finner igjen $\binom{n}{i}$ i Pascals trekant.

Må sjekke kantene: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \checkmark$$

Endelig: Et tall midt i trekanten er summen av de to rett over:

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \qquad 1 \le i \le n$$

Bevis:

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\frac{1}{1\cdot(n-i+1)} + \frac{1}{i\cdot 1}\right) \qquad k! = (k-1)!\cdot k$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\frac{i + n-i+1}{i\cdot(n-i+1)}\right)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\frac{n+1}{i\cdot(n-i+1)}\right)$$

$$= \frac{(n+1)!}{i!\,(n-i+1)!} = \binom{n+1}{i} \quad !!!!$$