

Numerisk integrasjon.

Minner om generell prosedyre for å finne metoder for numerisk integrasjon og derivasjon.

Tilnærme f med et polynom P (ved interpolasjon) og bruk tilnærming
 $f'(x) \approx P'(x)$, eller $\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx$

Eksempler på numerisk derivasjon:

i) $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, tilnærme med sekant i $a, a+h$.

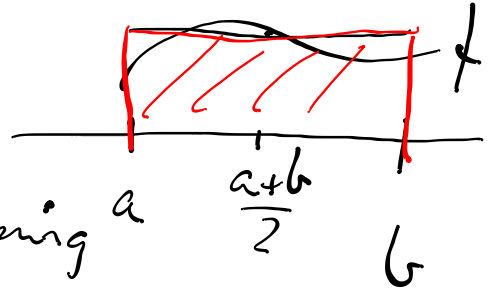
ii) $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$, Parabel i $a-h, a, a+h$

iii) $f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h}$, 4. grads pol.
i $a-2h, a-h, a, a+h, a+2h$

Numerisk integrasjon Kap. 12
i komp.

Midtpkt metoden

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



For a til b ved n delinger
deler vi $[a, b]$ i n inter

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Hvis $x_i - x_{i-1} = h$ for alle i (konstant
bredde)

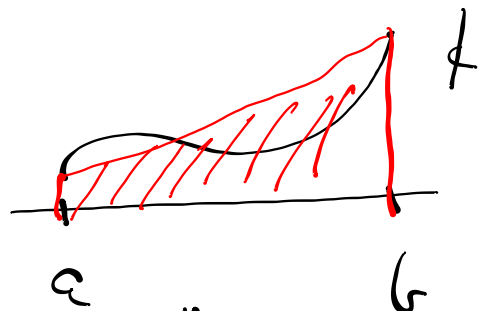
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n h f\left(a + (i - \frac{1}{2})h\right)$$



Trapesmetoden

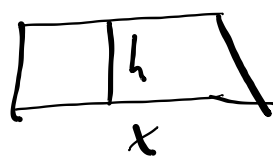
Ide: Tilnærme f med en ret linje
som går gennem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$



Del op i n biter:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$



$$\approx \sum_{i=1}^n h \cdot \frac{1}{2} \cdot (f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

$$h = \frac{x+y}{2}$$

$$= \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_0)) + \frac{h}{2} (f(x_2) + f(x_1))$$

$$+ \frac{h}{2} (f(x_3) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{2} (f(x_n) + f(x_{n-1}))$$

$$= h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$= h \left(\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Simpsons regel

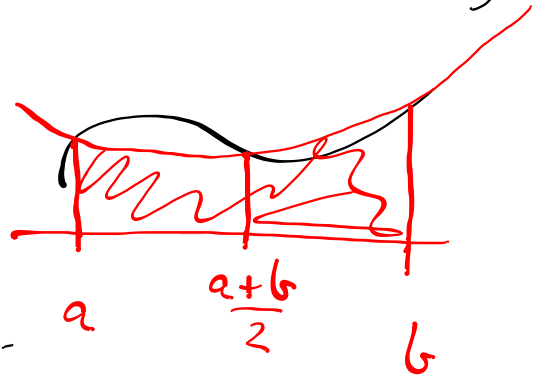
Tilnærme f med parabel gjennom

$$(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), (b, f(b))$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$$

Dal opp i små biter!

Når gir Simpson
feil = 0? (hvilke f).

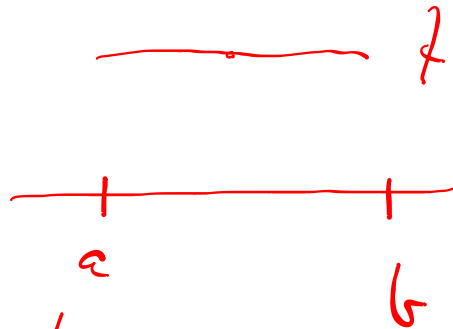


Parabler.

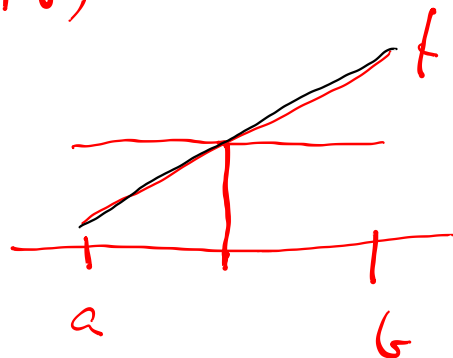
For hvilke f gir midtpkt
metoden feil 0?

$f(x) = c$ - (konstant)

feil 0.



Hva hvis $f(x) = ax + b$,
rett linje?



Feil i numerisk integrasjon.

$I = \int_a^b f(x) dx$, $I_{\text{mid}}(h)$ - midtpunkt metoden
med oppdeling h .

$$\text{Feil } |I - I_{\text{mid}}(h)| \leq (b-a) \frac{h^2}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Trapez $I_{\text{trap}}(h)$:

$$|I - I_{\text{trap}}(h)| \leq (b-a) \frac{h^2}{6} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Simpson, $I_{\text{simp}}(h)$:

$$|I - I_{\text{simp}}(h)| \leq (b-a) \frac{h^4}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|$$

Implementasjon

Algoritme

1. Velg intervallbredde h_0 .
2. Regn ut $I_{mid}(h_0), I_{mid}(h_0/2),$
 $I_{mid}(h_0/4), \dots$

Stopp når

$$\frac{|I_{mid}(h_0/2^v) - I_{mid}(h_0/2^{v-1})|}{|I_{mid}(h_0/2^v)|} \leq \epsilon$$