Differensialligninger

En differensialligning er en ligning som involverer en ukjent funksjon og dens deriverte. Grunnleggende for eksempel i fysikk. Newtons 2. lov.

Vår klasse:

$$x' = f(t,x), \quad \text{ukjent funksjon } x(t)$$

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Eks: $x' = 3$, $x' = t$, $x' = x$, $x' = x + t$

$$x' = \sin x \sin t$$

Eks. $x' = 3$, $x(t) = 3t + c$, $c \in \mathbb{R}$

Kan legge til en startverdi. $x(0) = 1$

$$1 = x(0) = 3 \cdot 0 + c, \quad c = 1$$

Endelig løsning $x(t) = 3t + 1$

Eks. $x' = x$, $x(1) = 1$ $\qquad x' = f(t,x)$

$$x' = x \Rightarrow x(t) = c e^t.$$

$$1 = x(1) = c e^1, \quad c = e^{-1}$$

$$x(t) = e^{-1} \cdot e^t = e^{t-1}$$

Hva er en differensialligning?

$x' = f(t, x)$. Hvis vi vet at $x(a) = x_0$

så kan vi regne ut $x'(a)$.

$x'(t) = f(t, x(t))$

Dermed er $x'(a) = f(a, x(a)) = f(a, x_0)$

Eks. $x' = x + t$, $x(1) = 2$

$x'(1) = x(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

Observasjon. Når vi kjenner $x(a) = x_0$ kan vi regne ut $x'(a)$ også og dermed finne tangenten til løsningen i a. Da kan vi følge tangenten fra a til a+h og finne en tilnærmet løsning i a+h.

Strategi for numerisk løsning:

$$x' = f(t, x), \quad x(a) = x_0$$

1. Regn ut $x'(a) = f(a, x(a)) = f(a, x_0)$
2. Finn tangent i a:

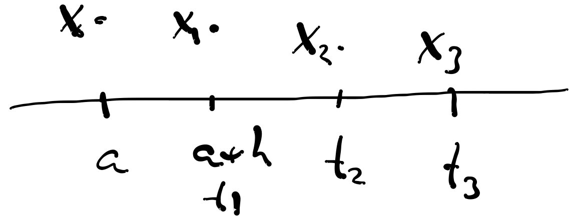
$$T(t) = x(a) + (t-a)\,x'(a)$$
$$= x_0 + (t-a)\, f(a, x_0)$$

3. $x(a+h) \approx x_1 = T(a+h) = x_0 + h\, f(a, x_0)$

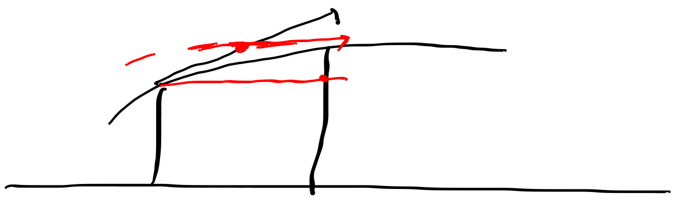
Kan gjentas og gir Eulers metode.

$$x_{i+1} = x_i + h\, f(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$t_i = a + i \cdot h$$



Mittelpkt Euler



Formel:

1. $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2} f(a, x_0)$

2. $x_1 = x_0 + h\, f(a + \frac{h}{2}, x_{1/2})$

Systemer av ligninger.

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(a) = \bar{x}_0$$

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$,

Eks.

$$x_1' = x_1 + x_2 - t, \quad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = \sin x_3 \qquad x_2(0) = 1$$

$$x_3' = x_1/(1+t^2) \qquad x_3(0) = 0$$

Euler for systemer $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + h\,\bar{f}(t_i, \bar{x}_i)$$

Separable differensialligninger

Kalkulus 16.5

I Kalkulus er differensialligningen på formen $y' = f(x,y)$

Ukjent funksjon er $y(x)$.

$y' = y + x$ (I forrige time $x' = x + t$).

Startverdi $y(a) = y_0$

En separabel ligning er på formen

$$q(y) \cdot y' = p(x)$$

Ex. $e^{-x} y' = 1 + y^2$

Skriver om til $\dfrac{y'}{1+y^2} = e^x$

$$\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = e^x$$

$q(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

$p(x) = e^x$

Integrer m.h.p x på begge sider.

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{1+y(x)^2} = \int e^x\,dx$$

H.S. $\int e^x\,dx = e^x + C$

V.S. Sett $u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{y'(x)}{1+y(x)^2}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u)$$

$$= \arctan(y(x))$$

$$\arctan(y(x)) = e^x + C$$

Ta tan på begge sider

$$\tan(\arctan(y(x)) = y(x) = \tan(e^x + c)$$

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

Ex. $e^{-x} y y' = -1$

$$y y' = -e^x$$

Integrerer H.S. $\int -e^x \, dx = -e^x + C$

V.S. $\int y y' \, dx$. Sett $u = y(x)$

$du = y'(x) \, dx$

$$= \int u \, du = \frac{1}{2} u^2$$

$$\frac{1}{2} y(x)^2 = -e^x + C$$

$$y(x)^2 = 2C - 2e^x$$

$$y(x) = \pm \sqrt{2C - 2e^x}$$