Tema: Differensiallikn. 10.1 – 10.3

d.v.s.: likn. der den ukjente er en funksjon, og likn. knytter sammen funksjonen og dens deriverte.

Vi kan også ha $y', y'', \ldots$

Viktige spm.:

- Hva kan dette brukes til?
- Finnes det en løsning?
- Er det bare en løsning?
- Hvordan beregne / finne en løsning?

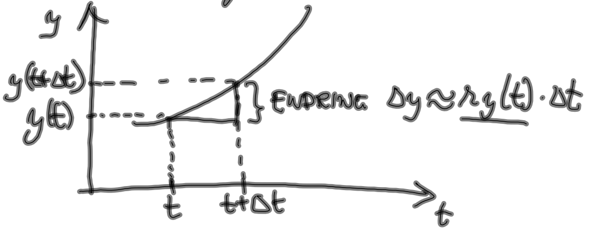
nov 7-12:07

nov 7-12:24

To eksempler:

Eks 1 (10.2.1) Dyrepopulasjon:

P ant. dyr idag, vekstrate r, hvor mange om t år?



nov 7-12:24

Det viktige er at endringen ved tid t avhenger av verdien $y(t)$.

Så:
$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx r\, y(t)\, \Delta t$$
$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx r\, y(t)$$

La $\Delta t \to 0$
$$\downarrow$$
$$y'(t) = r\, y(t)$$

d.v.s.: $\boxed{y' - ry = 0}$ DIFF. LIKN.

nov 7-12:29

Her $y(t) = Ce^{rt}$ en løsning, der C er et vilkårlig tall.

Sjekk: $y' = (Ce^{rt})' = C r e^{rt} = r(Ce^{rt})$
$$= ry$$

Randbetingelsen $y(0) = P$ gir
$y(0) = Ce^{r \cdot 0} = C = P$, så
$$\underline{\underline{y(t) = Pe^{rt}}}$$

nov 7-12:33

Hvordan fant vi den løsningen?

$$y' - ry = 0$$
$\Updownarrow$ multipliser med INTEGRERENDE FAKTOR
$$\underline{e^{-rt}}\, y' - e^{-rt} r y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(e^{-rt} y)' = 0$$
$$e^{-rt} y = C$$
$$\underline{\underline{y = Ce^{rt}}}$$

nov 7-12:38

Fra fysikk: legeme i fritt fall

LUFTMOTSTAND

$G = mg$ $\quad F_L = -kv$ fart

Newton's 2. lov:

$$F = ma = mg - kv \quad , \quad a = v'$$

$$mv' = mg - kv$$

$$\boxed{v' + \frac{k}{m} v = g}$$

FØRSTE ORD. LINEÆR DIFF. L.

nov 7-12:46

Ganger med "integ. faktor" $e^{\frac{kt}{m}}$ og får etter regning

$$v(t) = \frac{gm}{k} + \left(v_0 - \frac{gm}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

der $v_0 = v(0)$. START-FART

NB: Når t er "stor", er farten nesten konstant $\frac{gm}{k}$.

nov 7-12:52

TIRSDAG 16^{30} AUD 2 VB: MENTOR

10.1 Første ordens lineær d.l.

$$y' + f(x) y = g(x) \qquad (1.)$$

der f, g er gitte funksjoner og $y = y(x)$ er ukjent. Kaller y en løsning av (1.) på et intervall I dersom

$$y'(x) + f(x) y(x) = g(x) \quad \text{for alle } x \in I$$

nov 7-12:57

NB: Å vise at en gitt funk. y faktisk er løsning er lett: beregner derivert og setter inn!

Eks

$$y' + 2xy = x$$

Vis at $y(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ er en løsn. på hele $\mathbb{R}$. Deriverbar: OK.

Og: $y' = (-2x) e^{-x^2}$, så

$$y' + 2xy = (-2x) e^{-x^2} + 2x e^{-x^2} + \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

nov 7-13:20

Løsningsmetode generelt:

$$y' + f(x) y = g(x)$$

La F være en antiderivert til f, dvs: $F' = f$. Skriver om

$$e^{F(x)} y' + e^{F(x)} f(x) y = e^{F(x)} g(x)$$

$$\left(e^{F(x)} y\right)' = e^{F(x)} g(x)$$

$$e^{F(x)} y = \int e^{F(x)} g(x) dx + C$$

nov 7-13:26

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + C \right)$$

Teorem 10.1.3

$f, g : I \to \mathbb{R}$ kontinuerlige

I intervall

F antiderivert til f på I

Da er løsningen til diff.likn.

$$y' + f(x) y = g(x)$$

gitt ved

$$y = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + C \right)$$

nov 7-13:33

Kaller $e^{F(x)}$ for integrerende faktor.

Eks: $y' + 2xy = x$

$f(x) = 2x$, $F(x) = \int 2x\,dx = x^2$,

$e^{F(x)} = e^{x^2}$. Multipl. med int. faktor

$$e^{x^2} y' + e^{x^2} \cdot 2xy = e^{x^2} \cdot x$$

$$(e^{x^2} y)' = e^{x^2} \cdot x$$

$$e^{x^2} y = \int e^{x^2} \cdot x\,dx = \tfrac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$y = e^{-x^2}\left(\tfrac{1}{2} e^{x^2} + C\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

nov 7-13:36

Merk: Det er uendelig mange løsn., én for hver C. Ofte ønsker vi en løsning som oppfyller startbetingelsen $y(0) = \alpha$ (der α er gitt). Dette brukes til å bestemme C.

10.3 Eksistens og entydighet

Finnes det alltid en løsning? Og er den entydig for en gitt startbetingelse? JA JA

nov 7-13:44

Teorem 10.3.1

- $f, g : I \to \mathbb{R}$ kontinuerlige
- la $c \in I$, $d \in \mathbb{R}$

Da fins nøyaktig én løsning av diff.likn. $y' + f(x)y = g(x)$, $x \in I$ slik at $y(c) = d$. Denne løsn. er

$$y(x) = e^{-\int_c^x f(t)\,dt}\left(\int_c^x g(t)\, e^{\int_c^t f(s)\,ds}\, dt + d\right)$$

nov 7-13:48

Eks: $y' + \sin x \cdot y = \sin x$

Her: $F(x) = -\cos x$ antiderivert til $f(x) = \sin x$, og int. faktor er $e^{-\cos x}$.

$$e^{-\cos x} y' + e^{-\cos x} \sin x \cdot y = e^{-\cos x} \sin x$$

$$(e^{-\cos x} y)' = e^{-\cos x} \sin x$$

$$e^{-\cos x} y = \int e^{-\cos x} \cdot \sin x\,dx$$

$$e^{-\cos x} y = e^{-\cos x} + C$$

$$y = 1 + Ce^{\cos x}$$

Dette er generell løsn. Hvis vi har startbet. $y(0) = 2$ får vi $y(0) = 1 + Ce^{\cos 0} = 1 + Ce = 2$, så $C = \frac{1}{e}$ og $y(x) = 1 + \frac{1}{e} e^{\cos x}$

nov 7-13:54

nov 7-13:53

nov 7-13:25

nov 7-13:25

nov 7-13:20