Differensialligninger

$x' = f(t,x)$, $x(a) = x_0$

$x = x(t)$ ukjent funksjon.

1. Hvis $x' = g(t) + h(t)x$, lineær førsteordens ligning, kan løses ved formel, se 10.1 i Kalk

2. Hvis $q(x)x' = p(t)$, $x' = \dfrac{p(t)}{q(x)}$

er ligningen separabel, kan løses med formel, se 10.4 i Kalkulus.

Ellers må vi bruke numeriske metoder.

Numerisk løsning

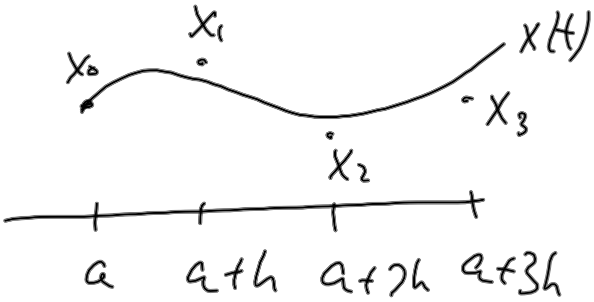
Kap. 13 i komp

$x' = f(t, x), \quad x(a) = x_0$

Entydig løsning nær (a, x_0) hvis f er 'pen' nær (a, x_0).

Numerisk løsning:

Beregn tilnærming x_i til $x(a+ih)$ for $i = 1, 2, \ldots, N$



Eulers metode.

Fra x_i til x_{i+1} ved:

$$\left.\begin{array}{l} t_i = a + ih \\ x_{i+1} = x_i + h\, f(t_i, x_i), \end{array}\right\} i = 0, 1, \ldots, N-1$$

Følg tangenten.

Derivasjon av diff.likn.

13.5 i Komp.

Anta $x' = t + x^2$, $x(a) = x_0$

Vi har $x'(t) = t + x(t)^2$

Da er $x''(t) = (t + x(t)^2)'$

$= 1 + 2x(t)\,x'(t)$

$= 1 + 2x(t)(t + x(t)^2)$

$= 1 + 2t\,x(t) + 2x(t)^3$

I $t = a$:

$x(a) = x_0$

$x'(a) = f(a, x(a)) = f(a, x_0) = a + x(a)^2$

$= a + x_0^2$

$x''(a) = 1 + 2a\,x(a) + 2x(a)^3$

$= 1 + 2a\,x_0 + 2x_0^3$

Fra x_0 til x_1:

$x(a+h) \approx x_1 = x(a) + h\,x'(a) + \frac{h^2}{2}x''(a)$

$= x_0 + h(a + x_0^2) + \frac{h^2}{2}(1 + 2x_0(a + x_0^2))$

Kvadratisk Taylor generelt

Vi kan alltid derivere $x' = f(t,x)$.

Vi får da $x'' = F_2(t,x)$.

Fra x_0 til x_1:

$$x_1 = \underset{\substack{\shortparallel \\ x_0}}{x(a)} + h\underbrace{f(a,x_0)}_{x'(a)} + \frac{h^2}{2}\underbrace{F_2(a,x_0)}_{x''(a)}$$

Vi kan derivere flere ganger og lage kubisk, 4. grad, 5. grad ... Taylor metode.

Runge-Kutta metoder leker Taylor ved å gjøre flere beregninger av $f(t,x)$. $x' = f(t,x)$, $x(a) = x_0$

Ex. Euler midtpkt. Fra (t_k, x_k) til x_{k+1} ved

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k + h/2, x_{k+1/2})$$

Ex. 2 Runge-Kutta av 4. orden: Bruker 4 funksjonsberegninger for å komme fra x_k til x_{k+1}: i t_k, $t_k + h/2$, $t_k + h/2$, $t_k + h$.

Like nøyaktig som Taylor av 4. grad.

System av diff ligninger

Eksempel

$$x' = xy + \cos z \ , \quad x(0) = x_0$$
$$y' = 2 - t^2 + z^2 y \ , \quad y(0) = y_0$$
$$z' = \sin t - x + y \ , \quad z(0) = z_0$$

$x(t), y(t), z(t)$ er ukjente funksjoner.

Hvis vi innfører vektornotasjon kan vi bruke metodene vi allerede kjenner

Sett $\bar{x} = (x, y, z)$, $\quad \bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$f_1(t, \bar{x}) = f_1(t, x, y, z) = xy + \cos z$$
$$f_2(t, \bar{x}) = f_2(t, x, y, z) = 2 - t^2 + z^2 y$$
$$f_3(t, \bar{x}) = f_3(t, x, y, z) = \sin t - x + y$$

Da kan systemet skrives som

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), f_2(t, \bar{x}), f_3(t, \bar{x}))$$
$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

Euler for systemer: $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\,\bar{f}(t, \bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Høyere ordens ligninger

Kamp 13.8

Anta at vi har

(**) $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$
$x'(0) = 0$

Sett $x_2 = x'$ slik at $x_2' = x''$

Da blir (**) til

$$x_2' = t^2 + \sin(x + x_2), \quad x(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

Sett $x_1 = x$. Da har vi totalt:

$$x_1' = x_2 \qquad x_1(0) = 1$$
$$x_2' = t^2 + \sin(x_1 + x_2), \quad x_2(0) = 0$$