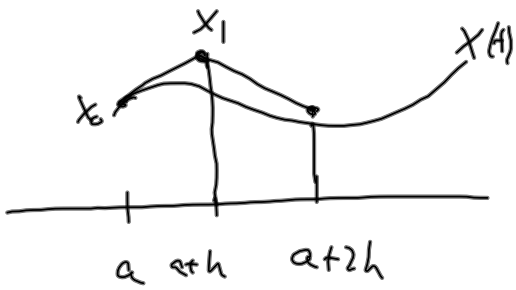
Num løsning av differensiallign. og feil.

Kap 13 i komp.

Utgangspkt $x' = f(t, x)$, $x(a) = x_0$

Vi finner tilnærming til $x(t)$ i noen punkter $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots$

$x_i \approx x(a+ih)$



Feil $\boxed{|x_i - x(a+ih)| \leq C h^p}$

der C er en konstant som avhenger av f og $p \in \mathbb{N}$.

Tabell over p for ulike metoder:

Euler	$p = 1$
Midtpkt Euler	$p = 2$
Taylor av grad n	$p = n$
RK4	$p = 4$
RK5	$p = 4$

Eksakte metoder for å løse differensialligninger

1. Separable ligninger 10.4 i Kalkulus
2. Førsteordens lineære ligninger 10.1–10.3 i Kalkulus
3. Andreordens lineære ligninger med konstante koeffisienter. Kalkulus 10.5

Generell andreordens lineær ligning:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

$y(x)$ ukjent funksjon.

Vi ser nå på tilfellet $p(x) = p$, $q(x) = q$ og $h(x) = 0$ – homogene ligninger med konstante koeff.

Homogen ligning med konst. koeff.

(*) $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Lemma 10.5.1 Anta at y_1 og y_2 er to løsninger av (*). Da er også

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

en løsning for alle valg av $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Fra to løsninger får vi uendelig mange. Hvordan finne to løsninger?

Husk at hvis $y' + by = 0$ så er

$y(x) = C e^{-bx}$ – på formen $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$

Prøv med $y(x) = e^{rx}$

i $y'' + py' + qy = 0$.

$y'(x) = re^{rx}$

$y''(x) = r^2 e^{rx}$

Innsatt:

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx}$$

$$= e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

Må ha $r^2 + pr + q = 0$

Denne ligningen har generelt to løsninger r_1 og r_2 som gir generell løsning

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Eksempel $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Kar. ligning:

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$r_1 = 1$, $r_2 = -2$

Generell løsning $y(x) = C_1 e^{1 \cdot x} + C_2 e^{-2 \cdot x}$

$= C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

Startverdier:

$y'(x) = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$

$1 = y(0) = C_1 + C_2$

$0 = y'(0) = C_1 - 2C_2 \Rightarrow C_1 = 2C_2$

$1 = C_1 + C_2 = 2C_2 + C_2 = 3C_2$, $C_2 = \frac{1}{3}$, $C_1 = \frac{2}{3}$

Endelig løsning

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(2e^{x} + e^{-2x}\right)$$

Tilfelle 1. $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

Alle løsninger av $y'' + py' + qy = 0$
er på formen $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
og kan alltid tilpasse $y(c) = d$, $y'(c) = e$
for $c, d, e \in \mathbb{R}$.

Tilfelle 2. $r_1 = r_2 = r$, $r \in \mathbb{R}$.

Da er r en dobbel rot. Vi vet at e^{rx} er en løsning. Da er også xe^{rx} en løsning.

Dermed er $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

generell løsning.

Kan tilpasses to startverdier.

Dette gir alle løsninger.

Ex. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$

$z^2 - 4z + 4 = 0$, er rot $r = 2$

Dermed er generell løsning

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

Har $y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2(e^{2x} + 2x e^{2x})$

$0 = y(1) = C_1 e^2 + C_2 e^2$

$-2 = y'(1) = 2C_1 e^2 + C_2(e^2 + 2e^2)$

Får $C_2 = -2e^{-2}$, $C_1 = 2e^{-2}$

$y(x) = 2e^{-2} \cdot e^{2x} - 2e^{-2} x e^{2x}$

Tilfelle 3. To ~~kompleks~~ komplekskonjugerte røtter. r og $\bar{r}$

Bør ha generell løsning

$$y(x) = E e^{rx} + F e^{\bar{r}x}.$$

Vi må velge $F = \bar{E}$ for å få reell løsning.

Anta $r = a + ib$, $\bar{r} = a - ib$

$E = A + iB$, $F = A - iB$

$$y(x) = E e^{rx} + \bar{E} e^{\bar{r}x}$$

$$= (A+iB) e^{(a+ib)x} + (A-iB) e^{(a-ib)x}$$

$$= (A+iB) e^{ax} \cdot e^{ibx} + (A-iB) e^{ax} \cdot e^{-ibx}$$

$$= e^{ax}\big((A+iB)(\cos bx + i \sin bx) + (A-iB)(\cos bx - i \sin bx)$$

$$= e^{ax}(2A \cos bx - 2B \sin bx)$$

$$= e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$$

$C, D \in \mathbb{R}$