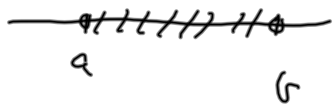
Reelle tall. Kap 2 i Kalkulus

Reelle tallene betegner vi med $\mathbb{R}$.

De vanligste delmengdene er intervallene:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ - lukket intervall

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$ - lukket



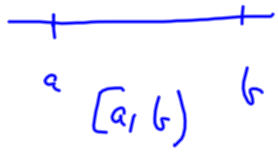
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ - lukket

Åpne intervaller:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



Halvåpne intervaller:

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

Tallverditegn

Tallverdien til et tall a er definert ved

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a, & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

$|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$

Merk at $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$, $|a| = \max(a, -a)$

Trekantulikheten

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

for alle $a, b \in \mathbb{R}$

Bevis: Vi vet at $a \leq |a|$, $b \leq |b|$

Da er $a+b \leq |a| + |b|$.

På samme måte $-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$

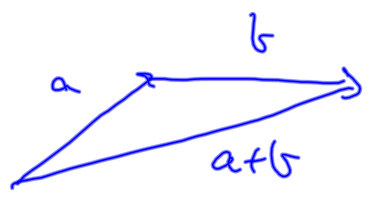
så $-(a+b) = -a-b \leq |a| + |b|$

Men $|a+b| = \max(a+b, -(a+b))$

Dermed er $|a+b| \leq |a| + |b|$

Hvorfor heter det trekantulikheten?

Hvis a og b er vektorer har vi



$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Rasjonale og irrasjonale tall.

Et reelt tall x som kan skrives $x = \frac{a}{b}$

der a og b er heltall, kalles et rasjonalt tall.

Mengden all alle rasjonale tall betegnes $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$$

$$(\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots \}$$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Et reelt tall som ikke er rasjonalt sies å være irrasjonalt.

Setning 2.2.1. Hvis x og y er rasjonale tall så er $x+y$, $x-y$, xy og x/y $(y \neq 0)$ også rasjonale tall.