Reelle tall Kap 2 i Kalkulus

Et tall er rasjonalt om det kan skrives som en brøk $a = \frac{m}{n}$ der $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Et reelt tall som ikke er rasjonalt sies å være irrasjonalt.

Setning. Hvis x og y er rasjonale er også $x+y$, $x-y$, xy og x/y $(y \neq 0)$ også rasjonale tall.

Korollar. (2.2.2). Dersom x er rasjonal og y irrasjonal er $x+y$, $x-y$, irrasjonale.
Hvis i tillegg både x og $y \neq 0$ er xy og x/y irrasjonale.

Bevis: Skal vise at $a = x+y$ er irrasjonal.
Anta at a er rasjonal. Vi har

$$y = a - x$$

Eks: $$\frac{3+\sqrt{2}}{12+4\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{4(3+\sqrt{2})} = \frac{1}{4}$$

Det fins irrasjonale tall!

Må ha noen hjelperesultater.

Lemma 2.2.3. Hvis $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er også a^2 et oddetall.

Bevis: a - oddetall så $a = 2n-1$ for $n \in \mathbb{N}$

Da er $a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$ – oddetall?

Merk at hvis b^2 er et partall $(b \in \mathbb{N})$ så må også b være et partall.

Teorem 2.7.4. $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall!

Bevis: Bruker motsigelse.

Anta at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall,

altså $\boxed{\sqrt{2} = \frac{a}{b}}$ der $a, b \in \mathbb{N}$ uten felles faktorer.

Vi kvadrerer

$2 = \frac{a^2}{b^2}$ så $\boxed{a^2 = 2b^2}$ (*)

altså er a^2 et partall. Men da er a et partall

Da har vi $a = 2m$ der $m \in \mathbb{N}$.

Vi setter dette inn i (*).

$(2m)^2 = 2b^2$ eller $4m^2 = 2b^2$

så $b^2 = 2m^2$ og da er også b et partall.

Konklusjon: a og b er begge partall

Dette motsier at a og b ikke har felles faktorer. Konklusjon: $\sqrt{2}$ kan ikke være et rasjonalt tall.

Beregning av $\sqrt{2}$.

Sett $x_0 = 1$

Deretter $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} = 1.41666\ldots$$

$$x_3 =$$

Arkimedes prinsipp.

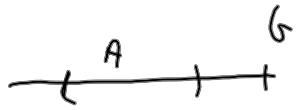
(i) For ethvert reelt tall a fins det et naturlig tall n slik at $n > a$.

(ii) For ethvert positivt reelt tall b fins det et naturlig tall m slik at $\frac{1}{m} < b$.

Setning 2.2.7 Ethvert åpent intervall (a,b) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Kompletthetsprinsippet

En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det fins et tall b slik at $x \leq b$ for alle $x \in A$.



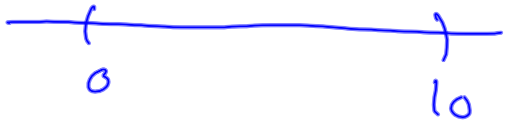
b kalles en øvre skranke for A.

b kalles en minste øvre skranke for A hvis b er mindre enn alle andre øvre skranker for A.

Vi skriver $b = \sup A$ – minste øvre skranke.

Ex. $A = [0, 10]$. Øvre skranke er 100
10 er minste øvre skranke

$A = (0, 10)$



Kompletthetsprinsippet

Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$.

Ex. Sett $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 2\}$

Ser at $1 \in A$ så er ikke tom.

2 er en øvre skranke – A er oppad begrenset

Derfor kan vi bruke kompletthetsprinsippet

sup A eksisterer og er et reelt tall

$\sup A = \sqrt{2}$!

Lett å se at hvis $b = \sup A$ så må $b^2 = 2$

De rasjonale tallene er tellbare!

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$	$\frac{\ }{\ }$