Kompletthetsprinsippet

Seksjon 2.3

Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$

Ex. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 2\}$

$\sup A = \sqrt{2}$ selv om beskrivelsen av A bare involverer heltall.

Reelle tall som desimaltall.

Et reelt tall kan ha uendelig mange desimaler.

Eks

$$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

$$\frac{1}{9} = 0.11111\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857\,142857\,142857\ldots$$

For irrasjonale tall vil sifferne ikke gjenta seg – det fins ikke noe system.

$$\sqrt{2} = 1.41421357\ldots$$

$$e = 2.71828\,1828\,459\ldots$$

Tall på datamaskin   Kap 2
hvorfor 0 og 1 ?   i komp.

Kommunikasjon via 0 og 1 er robust ovenfor feil. Ulempe: Mye informasjon krever mange 0'er og 1'ere.

Vi skal se på representasjon av:

1. Heltall
2. Reelle tall
3. Bokstaver og tegn
4. Annen informasjon

Tall og siffersystemer Kap. 3 i komp.

Litt notasjon:

I 3.14 kaller vi 3 heltallsdelen og
0.14 brøkdelen

Hvis a og b er to heltall er a//b
resultatet av heltallsdivisjon av a med b
mens a % b gir resten i divisjonen.

Eks: 3//2 = 1 , 9//4 = 2, 24//6 = 4

3 % 2 = 1 , 23 % 5 = 3 , 24 % 6 = 0

Titall systemet.

$$3761 = 3\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0$$

$$223_7 = 2\cdot 7^2 + 2\cdot 7^1 + 3\cdot 7^0 = 2\cdot 49 + 2\cdot 7 + 3$$
$$= 98 + 14 + 3 = 115$$

$$283_\beta = 2\cdot \beta^2 + 8\cdot \beta^1 + 3\cdot \beta^0$$

I β-tall systemet bruker vi sifferne
$0, 1, 2, 3, 4 -, \beta - 1$.

Hvis $\beta = 16$ har vi sifferne
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \underset{10}{a}, \underset{11}{b}, \underset{12}{c}, \underset{13}{d}, \underset{14}{e}, \underset{15}{f}$

$$eb1_{16} = e\cdot 16^2 + b\cdot 16^1 + 1\cdot 16^0$$
$$= 14\cdot 256 + 11\cdot 16 + 1 = 3761_{10}$$

Lemma 3.5. Ethvert naturlig tall kan representeres på en entydig måte i β-tall systemet (for $\beta > 1$).

Bevis: Ett konkret tilfelle, $\beta = 8$, $a = 3761$.

Merk at $8^4 = 4096 > a$ så

$$a = 3761 = (d_3 d_2 d_1 d_0)_8 = d_3 8^3 + d_2 8^2 + d_1 8^1 + d_0$$

Vi ser at om vi dividerer høgre side med 8 blir resten d_0. Men høgre side = venstre side $= 3761$ så $\boxed{d_0 = 3761 \% 8 = 1}$

Vi ser også at $3761 // 8 = 470$.

Da er $470 = d_3 8^2 + d_2 8^1 + d_1$

$\boxed{d_1 = 470 \% 8 = 6}$, $470 // 8 = 58$

Altså $58 = d_3 \cdot 8 + d_2$,

$d_2 = 58 \% 8 = 2$, $58 // 8 = 7$

$7 = d_3$

$3761 = 7261_8$

Algoritme for å konvertere til β-tall syst.

Gitt a og β. Anta $k+1$ ~~s~~ siffer

$a_0 = a$

for $i = 0, 1, \ldots, k$

$d_i = a_i \,\%\, \beta$

$a_{i+1} = a_i \,//\, \beta$