Kansellering

$$\begin{array}{l} 3.1415 \\ \underline{3.141} \\ 0.0005 \\ 0.5000 \cdot 10^{-3} \end{array}$$

Divisjon og multiplikasjon av flyttall er OK.

Kan få underflow: Et svar blir så lite at det blir satt til 0.

Kan få overflow: For stort tall. Infinity

Måling av feil.

Hvis $\tilde{a}$ er en tilnærming til a kan vi måle feilen på to måter:

$|a-\tilde{a}|$ - absolutt feil

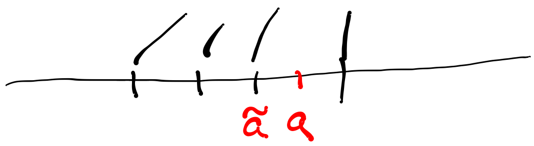
$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|}$ - relativ feil

Observasjon. Hvis $\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} \approx 10^{-m}$ så har a og $\tilde{a}$ omtrent m felles siffer.

Observasjon 2. Hvis $a \in \mathbb{R}$ og $\tilde{a}$ er nærmeste flyttall (64 bit) så er

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} \le 5 \cdot 2^{-53}$$

flyttall



Omskriving av uttrykk.

Anta at vi skal regne ut

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \quad \text{for} \quad x = 10^8$$

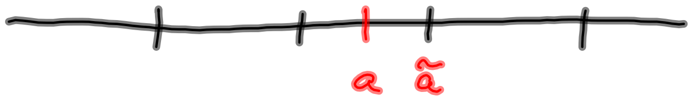
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\;-x}$$

Løsning:

$$\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2+1-x^2}$$

$$= \sqrt{x^2+1}+x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}$$



$$|a-\tilde{a}|$$

Differensligninger

Kap 4 i Kalkulus

En følge er en sekvens av tall

$\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

En differensligning er en ligning der den ukjente er en følge.

Eks: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$

Løsning

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

Eks. Anta at vi har 100 000 i banken til 3% rente. Hvor mye har vi etter 10 år? La x_n være beløp etter n år.

$$x_0 = 100\,000$$

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}03\, x_n = 1{,}03\, x_n$$

$$x_1 = 1{,}03\, x_0$$

$$x_2 = 1{,}03\, x_1 = 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot x_0 = 1{,}03^2 x_0$$

$$x_n = 1{,}03^n x_0$$

Generell første ordens ligning

$$x_{n+1} = r \cdot x_n, \quad x_0 = a, \quad r, a \text{ gitte tall}$$

Ved å sette inn ser vi at løsningen er

$$x_n = r^n \cdot x_0$$

Andreordens differensligninger

Ligningen $x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$

der b, c er gitte tall kalles en andreordens differensligning.

Ex. $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Lemma 4.1.3. Hvis b_0 og b_1 er to gitte tall fins det nøyaktig en løsning av

$$x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$$

slik at $x_0 = b_0$ og $x_1 = b_1$.

Lemma 4.1.4 Anta at vi har to løsninger $\{z_n\}$ og $\{y_n\}$ av $x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$

Hvis C_1 og D er vilkårlige tall vil og så

$$x_n = C_1 \cdot y_n + D z_n$$

være en løsning for alle C, D.

Hvordan kan vi finne en løsning?

Ligningen er $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$.

Prøv med $x_n = r^n$, der r er ukjent tall.

Setter inn

$$r^{n+2} + b r^{n+1} + c \cdot r^n = 0$$

$$r^n (r^2 + br + c) = 0$$

Hvis r_1 og r_2 løser $r^2 + br + c = 0$ vil $x_n = r_1^n$ og $x_n = r_2^n$ begge være løsninger av $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$.

Dermed vil også $x_n = C_1 r_1^n + D r_2^n$ være en løsning for alle C_1 og D

Må skille tre tilfeller: (i) To reelle røtter (ii) En reell rot, (iii) To komplekse konjugerte røtter.

Ex. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$

Andre grads ligning.

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$r_1 = 1$, $r_2 = 4$

$1 = x_0 = C + D$

$-2 = x_1 = C + D \cdot 4$

Løsning $x_n = C \cdot 1^n + D \cdot 4^n$

$= C + D \cdot 4^n$

$C + D = 1$

$C + 4D = -2$

$x_0 = 1$, $x_1 = -2$ gir $C = 2$, $D = -1$.

$x_n = 2 - 4^n$