Et detaljert induksjonsbevis

Knut Mørken

22. august 2013

1 Innledning

På forelesningen 22/8 gjennomgikk vi i detalj et induksjonsbevis for at formelen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

er riktig for alle naturlige tall $n = 1, 2, 3, \ldots$, og dette notatet er en oppsummering av denne forelesningen. Induksjon er erfaringsvis et tema mange sliter med, men det viktigste steget i å utvikle forståelsen er å se at det virker på et eksempel der en forstår alle detaljer. Når en så skal gjennomføre andre bevis kan en referere tilbake til det enkle prototypeksempelet når en blir usikker.

Fordelen med formelen (1) er at en sum som inneholder n ledd, og dermed kan bli svært lang når n er stor, kan beregnes ved den enkle høyresiden som bare inneholder produktet av de tre tallene $1/2$, n og $n+1$. Hvis for eksempel $n = 10000$ er det en lang og kjedelig jobb å regne ut $\sum_{i=1}^{10000} i$ selv på en lommeregner, mens det er kjapt å regne ut høyresiden til å være $1/2 \cdot 10000 \cdot 10001 = 50005000$.

Noen lurer på hvor vi fikk formelen (1) fra. Det er forsåvidt et godt spørsmål, men det er ikke det vi er opptatt av nå. Det fins metoder for å finne fram til slike formler, ofte ved mer eller mindre strukturert gjetting. Veldig ofte gir ikke slike metoder noe bevis for at formelen alltid er riktig; dette må sjekkes på annen måte, og da er induksjonsbevis et svært nyttig verktøy.

2 Et meget detaljert induksjonsbevis

La oss begynne med å sjekke om formelen (1) holder for små verdier av n. For å gjøre dette er det hendig å gi formelen på høyre side et navn, for eksempel

$$s_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

- $n = 1$. I dette tilfellet ser vi at venstresiden av (1) er $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ mens høyresiden er $s_1 = 1/2 \cdot 1 \cdot 2 = 1$. Altså stemmer formelen for $n = 1$.
- $n = 2$. Nå blir venstresiden $\sum_{i=1}^{2} i = 1 + 2 = 3$, mens høyresiden er $s_2 = 1/2 \cdot 2 \cdot 3 = 3$. Dermed er formelen også riktig for $n = 2$.
- $n = 3$. Venstresiden er $\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = 3 + 3 = 6$, mens $s_3 = 1/2 \cdot 3 \cdot 4 = 6$, så formelen (1) stemmer også for $n = 3$.
- $n = 4$. Venstresiden er $\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 6 + 4 = 10$, mens $s_4 = 1/2 \cdot 4 \cdot 5 = 10$, så formelen stemmer.
- $n = 5$. Venstresiden er $\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=1}^{4} i + 5 = 10 + 5 = 15$, mens $s_5 = 1/2 \cdot 5 \cdot 6 = 15$, så formelen stemmer.
- $n = 6$. Venstresiden er $\sum_{i=1}^{6} i = \sum_{i=1}^{5} i + 6 = 15 + 6 = 21$, mens $s_6 = 1/2 \cdot 6 \cdot 7 = 21$, så formelen stemmer.
- $n = 7$. Venstresiden er $\sum_{i=1}^{7} i = \sum_{i=1}^{6} i + 7 = 21 + 7 = 28$, mens $s_7 = 1/2 \cdot 7 \cdot 8 = 28$, så formelen stemmer.

Så langt ser det klart ut som formelen (1) er riktig, men vi har bare sjekket 7 tilfeller, så det er uendelig mange igjen å sjekke! Skal vi få sjekket at formelen er riktig for alle verdier av n må vi åpenbart finne en annen framgangsmåte enn å sjekke hvert enkelttilfelle.

Når vi ser på hva vi gjorde for å verifisere formelen i tilfellene $n = 1$, 2, …, 7 så er det ett fellestrekk som går igjen i hvert tilfelle, bortsett fra tilfellet $n = 1$. Når vi for eksempel sjekket tilfellet $n = 6$ så kunne vi benytte oss av at vi allerede hadde regnet ut $\sum_{i=1}^{5} i = 15$, noe som gjorde arbeidet raskere. Når vi så skulle regne ut $\sum_{i=1}^{7} i$ benyttet vi oss av at vi allerede hadde regnet ut $\sum_{i=1}^{6} i = 21$. Hvis vi fortsetter å sjekke spesialtilfeller er dette en god og fornuftig strategi.

Anta nå at vi fortsetter å sjekke enkelttilfeller helt opp til $n = k$, med andre ord at vi har sjekket at formelen stemmer for alle naturlige tall $n = 1$, 2, 3, …, k; nå skal vi sjekke om mønsteret over gjentar seg og at vi da også kan etablere (1) for $n = k + 1$.

Vi har altså sjekket formelen for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$, $n = k$ slik at vi vet at formelen

$$\sum_{i=1}^{k} i = s_k = \frac{1}{2}k(k+1) \tag{2}$$

er riktig. La oss se om vi kan utnytte dette til å vise at formelen da også gjelder for $n = k + 1$, altså at

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = s_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \tag{3}$$

Som i tilfellene $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$ splitter vi summen og skriver

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \Big(\sum_{i=1}^{k} i\Big) + k + 1.$$

Siden vi nå antar at (2) er riktig utnytter vi dette og får

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \Big(\sum_{i=1}^{k} i\Big) + k + 1 \\ &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1)\Big(\frac{k}{2} + \frac{2}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \end{aligned} \tag{4}$$

Men dette siste uttrykket er åpenbart det samme som s_{k+1}. Dermed har vi bevist at *om formelen* (2) *er riktig så vil også formelen* (3) *være riktig.* Med andre ord er det slik at om (1) gjelder for $n = k$ så vil den også gjelde for $n = k + 1$.

Hvilke konsekvenser har dette? Vi sjekket over at (1) er riktig for $n = 7$, så vi vet at hypotesen vår om at (2) skal være sann faktisk er riktig når $k = 7$. Argumentet vi nettopp gjennomførte viser at da må også (3) være sann, altså holder (1) for $n = k + 1 = 8$. Men da kan vi gjenta argumentet vårt med $k = 8$. Dette gir at formelen også må være riktig for $n = k+1 = 9$. Deretter kan vi gjenta argumentet med $k = 9$, $k = 10$, $k = 11$ osv, og det utrolige er at vi på denne måten kan etablere (1) for alle mulige verdier av n. Isteden for å sjekke (1) for hver eneste verdi av n har vi altså etablert et argument som øker gyldigheten av formelen fra $n = k$ til $n = k + 1$, og siden argumentet gjelder for alle positive verdier av k ser vi at vi dermed har bevist (1) for alle verdier av n. Vi ser også at det ikke er nødvendig å sjekke så mange verdier av n til å begynne med som det vi gjorde. Faktisk holder det å verifisere formelen for $n = 1$; etter dette kan vi bruke argumentet over for $k = 1, 2, 3, \dots$.

Induksjonsbevis sammenlignes ofte med dominobrikker. For å få dominobrikker til å falle må vi vite at om en brikke faller så vil også den neste falle. Om dette er tilfelle ser vi at om vi dytter til den første brikken vil alle brikkene falle i tur og orden. Argumentet over som tar oss fra $n = k$ til $n = k+1$ svarer til at en brikke velter den neste, mens det å sjekke $n = 1$ svarer til å dytte til den første brikken.

Vi kan nå oppsummere beviset vårt i et generelt prinsipp.

Induksjonsprinsippet. *Anta at utsagnet P_n gir mening for $n = 1, 2, \dots$. For å bevise at P_n er sant for alle naturlige tall n kan vi gjøre følgende:*

1. *Sjekk at P_1 er sann.*
2. *Anta at k er et naturlig tall og at P_n er sann for $n = k$. Bruk dette til å vise at da vil P_n også være sann for $n = k + 1$.*

Om begge disse stegene lar seg gjennomføre må P_n være sann for alle naturlige tall n

Ordet utsagn angir her noe som enten er sant eller galt. I vårt tilfelle over er utsagnet P_n likheten i (1) som for hver n enten er sann eller gal.

Grunnen til at P_n er sann for alle verdier av n dersom de to stegene over lar seg gjennomføre er akkurat som i vårt bevis over. Vi sjekker først eksplisitt at P_1 er sann, og setter så $k = 1$. Hvis steg 2 i induksjonsprinsippet er sant så forteller det oss da at siden P_1 er sann må også P_2 være sann. Deretter setter vi $k = 2$ og steg 2 forteller oss da at P_3 må være sann. Vi setter så $k = 3$ og får at P_4 må være sann. På denne måten får vi etablert at P_n er sann for alle naturlige tall n.

Det er viktig å skille mellom induksjonsprinsippet og dets praktiske anvendelse på et konkret eksempel. Induksjonsprinsippet er ikke mer enn det enkle prinsippet over. Men det å anvende det på et konkret eksempel kan ofte være utfordrende. Som regel er det ganske enkelt å vise at P_1 er sann, mens det ofte kan være mer utfordrende å vise at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann. I vårt eksempel på bevis for formelen (1) er P_1 opplagt sann. Det å vise at om formelen holder for $n = k$ så må den også holde for $n = k + 1$ er litt mer omfattende (argumentet i (4)), men allikevel ganske enkelt. I andre sammenhenger kan steg 2 bli stort og omfattende.

3 Varianter av induksjonsprinsippet

Induksjonsprinsippet slik vi har formulert det her er skreddersydd til vårt eksempel og andre lignende tilfeller, der vi ønsker å bevise en sekvens av utsagn $\{P_n\}$ som begynner med $n = 1$ og fortsetter med P_2, P_3, osv. Det kan selvsagt hende at vi kan komme i en situasjon der det første tilfellet ikke svarer til $n = 1$, men heller $n = 0$, $n = -10$, $n = 37$ eller et annet naturlig tall. Vi kan opplagt tilpasse induksjonsprinsippet til dette ved å endre det litt.

Generalisering av induksjonsprinsippet. *La n_0 være et naturlig tall og anta at utsagnet P_n gir mening for $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$. For å bevise at P_n er sant for alle naturlige tall n som er større enn eller lik n_0 kan vi gjøre følgende:*

1. *Sjekk at P_{n_0} er sann.*
2. *Anta at k er et naturlig tall som tilfredstiller $k \geq n_0$ og at P_n er sann for $n = k$. Bruk dette til å vise at da vil P_n også være sann for $n = k + 1$.*

Om begge disse stegene lar seg gjennomføre må P_n være sann for alle naturlige tall n slik at $n \geq n_0$.

Det fins en mer omfattende generalisering av induksjonsprinsippet som vi bare vil beskrive uformelt. Kjernen i prinsippet er å gjennomføre steget fra $n = k$ til $n = k + 1$, og slik vi brukte prinsippet trengte vi bare å vite at P_k var sann for å slutte at P_{k+1} var sann. Men det er klart at om vi har sjekket at alle utsagnene opp til P_k er sanne så kan vi i beviset for at P_{k+1} er sann benytte oss av at P_n er sann for alle n i området $n_0 \leq n \leq k$ om det skulle være nødvendig. I slike tilfeller er det viktig å huske på at vi kanskje må etablere sannheten til flere utsagn enn P_{n_0} til å begynne med. Hvis vi for eksempel trenger å vite at både P_{k-1} og P_k er sann for å slutte at P_{k+1} er sann må vi til og begynne med sjekke at både P_{n_0} og P_{n_0+1} er sanne.

Oversatt til dominobrikker svarer dette til et oppsett som er slik at en brikke bare faller dersom den blir truffet av begge de to foregående brikkene. For å få i gang kjedereaksjonen må vi da dytte til *begge* de to første brikkene. I slike mer generelle situasjoner er det viktig å tenke nøye gjennom hva som faktisk foregår, slik vi gjorde i eksempelet over, og påse at vi dytter til nok brikker til å begynne med til at alle brikkene faktisk faller til slutt. Det er vanskelig å sette opp en generell beskrivelse siden det kan være store variasjoner på hvor mange av de første utsagnene som må bevises manuelt til å begynne med, uten induksjon.