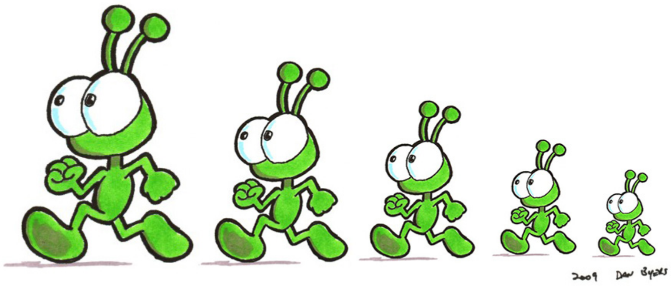
Oppgaveversjon 24.10.2013 kl 2200

Grønne menn på Mars?



Alternativ oblig 2 for FAM-studenter som tar MAT-INF1100 høsten 2013

Innleveringsfrist 7. november 2013 kl 14:30

Dersom du ønsker å titte nøye på Mars for å se om det finnes grønne menn der, bør du vite når avstanden mellom Jorda og Mars er minst mulig i nærmeste framtid. Du kan selvfølglelig finne ut slikt ved å gå inn i tabeller regnet ut av andre. Det er imidleretid mulig å gjøre dette selv ut fra ferdighetene dere har fått dette semesteret! Vi starter ut med Newtons ligninger som gir oss en differensialligning, og henter nøyaktige posisjons- og hastighetsdata for dagen i dag fra NASA, og integrerer opp numerisk ved hjelp av Eulers metode (eller bedre metoder). Og vips kan du bestemme hvilken dag du bør finne fram teleskopet! Blir du med på morroa?

Info om leveringsfrister o.l.

Det er samme regler for utforming og innlevering av denne obligen som for den ordinære. Les derfor nøye det som er gitt på første side i den ordinære MAT-INF 1100 oblig 2. Vi oppfordrer sterkt til at grupper på 2-4 samarbeider om obligen, men samtidig skal obligene være utformet av hver enkelt og hver enkelt må skjønne fullt ut alt han/hun har med i obligen av programmer og tekst.

Mål med obligen:

Hovedmålet er å kunne integrere opp numerisk en (annen ordens) differensialligning vha. Eulers og Eulers midtpunktmetode, når initialbetingelsene er gitt. Obligen vil også gi noe erfaring i å hente nøyaktige posisjons- og hastighetsdata for himmellegemer ved å sende en e-mail til NASA (NASA's system svarer etter få sekunder på akkurat din henvendelse).

Sosialt/faglig:

I tillegg til de vanlige gruppetimene i uke 44 og 45 og panikkhjelpen tirsdag 5. november, gis det veiledning og hjelp til arbeidet med obligen mandag 4. og onsdag 6. november, begge dager fra kl 17:00 til kl 21:00 i Fysikkbygget. Det serveres pizza og brus, og du må derfor melde deg på én av de angitte kveldene for at vi kan dimensjonere mat og drikke riktig. Påmelding skjer til **https://nettskjema.uio.no/answer/56802.html**. Det blir også satt opp et teleskop enkelte perioder i løpet av de to kveldene hvor dere kan se på artige detaljer på kveldshimmelen (forutsatt at det er klarvær). Dessverre er ikke Mars eller andre planeter synlige på kveldstid nå for tiden, men det er likevel andre detaljer å kikke på.

Teori:

Teorien bak planetbevegelse kommer vi tilbake til i FYS-MEK1100 til våren. Som vist i detalj i vedlegget (for de mest interesserte), kan bevegelsen beskrives ved hjelp av to enkle relasjoner som kan integreres opp f.eks. ved hjelp av Eulers metode. De to relasjonene er:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{GM}{r^3}x \qquad \text{og} \qquad dx/dt = v_x \tag{1}$$

Relasjonene stammer fra Newtons 2. lov og Newtons gravitasjonslov.

I uttrykket er x og v_x x-komponenten av henholdsvis posisjonsvektor og hastighetsvektor til en planet hvor Sola er plassert i origo. Siden bevegelsen foregår i 3D, blir det helt tilsvarende uttrykk for hastighets- og posisjons-komponentene i y- og z-retningene. G er gravitasjonskonstanten (6.67384e-11mm^3 kg^{-1} s^{-2}), M er Solas masse (1.98855e30 kg), m er planetens masse (faller bort i uttrykket), og $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ er avstanden mellom solas tyngdepunkt og planetens tyngdepunkt.

Siden vi starter med en 2. ordens differensialligning (Newtons 2. lov) må vi kjenne til to initialbetingelser for hver retning x, y og z for å løse ligningene entydig. I vårt tilfelle bruker vi posisjon og hastighet ved starttidspunktet som initialbetingelser.

Oppgave 1: Hent data fra NASA

Hent ned initialbetingelsene for dine beregninger fra NASA. Dette gjøres ved å sende en e-mail til *horizons@ssd.jpl.nasa.gov* som må se ut som dette (for Jorda):

```
!$$SOF
COMMAND= '399'
CENTER= '500@0'
MAKE_EPHEM= 'YES'
TABLE_TYPE= 'VECTORS'
START_TIME= '2013-10-28'
STOP_TIME= '2013-11-04'
STEP_SIZE= '1 d'
OUT_UNITS= 'KM-S'
VECT_TABLE= '3'
REF_PLANE= 'ECLIPTIC'
REF_SYSTEM= 'J2000'
VECT_CORR= 'NONE'
VEC_LABELS= 'NO'
CSV_FORMAT= 'NO'
OBJ_DATA= 'YES'
!$$EOF
```

Merk:
Dersom du klipper/limer teksten til venstre fra pdf-filen, vil aprostofene som avgrenser parametrene i noen datasystemer bli omsatt til en aprostof-variant (enten til "aksent" eller til tegnet for "fot") som NASA ikke godtar. Du får da en feilmelding. Forsøk i så fall å bruke søk/erstatt og skift til en av de andre aprostrofvariantene.

E-mailen må ha **JOB** i subject linjen (store bokstaver). Du får svar fra NASA på den e-mail-adressen du sendte denne jobben fra. [1]

Fra svarmailen må du plukke ut initialbetingelsene for posisjonsvektor og hastighetsvektor for den dagen du velger som start for beregningene dine. Bruk "klipp" og "lim inn" for å unngå feil når du henter inn initialbetingelsene i programmet du lager (neste punkt), men juster eksponenten siden tallene du får fra NASA er gitt i km og km/s mens vi skal bruke m og m/s.

Gjør det samme for å få initialbetingelsene for Mars når du siden trenger disse (bruk samme starttidspunkt som for Jorda). Erstatt da koden '399' (Jorda) med '499' (Mars) i andre linje.

[1]Dersom du ønsker å forstå hva parametrene i mailen ovenfor står for, eller dersom du vil utforske andre himmellegemer, bør du sende en mail til samme adresse, men med subject line **BATCH-LONG**. Du får da info om muligheter som finnes (innholdet i selve mailen er da likegyldig).

Oppgave 2: Jordas bane med Eulers metode

Tar vi utgangspunkt i "Algorithm 13.12" i kompendiet for kurset og ligningene ovenfor, kan vi vise at for en planetbevegelse vil en algoritme basert på Eulers metode inneholde følgende komponenter:

$$
\begin{aligned}
&h = (b-a)/n;\\
&t_0 = a;\\
&\text{for k} = 0, 1, ..., n-1\\
&\quad r = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{(1/2)};\\
&\quad g = \frac{GM}{r^3};\\
&\quad x_{k+1} = x_k + hv_{x,k};\\
&\quad v_{x,k+1} = v_{x,k} - hgx;\\
&\quad y_{k+1} = y_k + hv_{y,k};\\
&\quad v_{y,k+1} = v_{y,k} - hgy;\\
&\quad z_{k+1} = z_k + hv_{z,k}; \qquad\qquad *\\
&\quad v_{z,k+1} = v_{z,k} - hgz; \qquad\quad **\\
&\quad t_{k+1} = a + (k+1)h;
\end{aligned}
$$

♣ Forklar hvordan linjen merket $*$ fremkommer ved å ta utgangspunkt i definisjonen av hastighet (som den tidsderiverte av posisjonen). ♣ Kanskje du da samtidig gjennomskuer linjen merket $**$ ved å ta utgangspunkt i definisjon av akselerasjon (som den tidsderiverte av hastighet), når vi samtidig bruker Newtons 2. lov og gravitasjonsloven? [Dette siste punktet er frivillig å svare på.]

Lag et Python-program som bruker Eulers metode for å beregne banen til Jorda fra en gitt dato (f.eks. 28. oktober 2013) og et Jordår framover i tid (365.25636 døgn). Startpunktet kan gjerne defineres som tiden $t = 0$ bare du angir virkelig dato i tekst/kommentarer i programmet. Del året opp i $n = 2000$ like store tidssteg. Husk at det må $n+1$ datapunkter til for å definere n tidssteg. Husk også at h må være angitt i sekunder!

Plot y-komponenten som funksjon av x-komponenten (x-verdiene for punktene i banen langs x-aksen og y-verdiene langs y-aksen, ok siden bevegelsen tilnærmet foregår i xy-planet). Plot en markering (en farget prikk, et kryss el.l.) for å markere 1) første punkt i beregningene, 2) et punkt ca 100 punkter etter start (for å kunne se hvilken vei bevegelsen går), 3) siste punkt i beregningene, og 4) posisjonen til Sola (x = 0, y = 0).

♣ Er du fornøyd med resultatet? Kommenter hvorfor / hvorfor ikke.

Oppgave 3: Jordas bane med Eulers midtpunktmetode

Ta utgangspunkt i det ovenforstående og "Algorithm 13.29" i kompendiet for å utforme en algoritme for å beregne planetbevegelser basert på Eulers midtpunkt-metode. Den delen av algoritmen som er innenfor løkka blir omtrent dobbelt så lang som for Eulers metode, men det er heldigvis enkle variasjoner av samme tema hele veien.

Bruk Eulers midtpunktmetode for å beregne Jordas bane for ett år framover i tid, på tilsvarende måte som i oppgave 2. Plot resultatet. Ga midtpunktmetoden en forbedring i beregningene? Hva baserer du deg på ved denne vurderingen?

♣ Forklar *hvorfor* Eulers midtpunktmetode gir vesentlig bedre resultat enn den enkleste Eulers metode i vårt tilfelle (Hint: Er det et systematisk avvik fra det korrekte i hvert trinn i beregningene for én av metodene?).

Oppgave 4: Avstanden Jorda Mars

Tiden er nå moden for å beregne hvordan avstanden mellom Jorda og Mars varierer i nærmeste framtid. Jordas bane vet du allerede hvordan du kan beregne. Ved å hente initialbetingelser fra NASA for Mars, kan du beregne også Mars' bane. Mars-året er nesten dobbelt så langt som Jord-året, så total tid for beregningene må utvides til to Jord-år for begge planetene.

Lag et program som (etter tur) beregner banene til både Jorda og Mars, og plotter begge banene i samme plot på tilsvarende vis som i oppgave 3. ♣ Angi en karakteristisk forskjell mellom de to banene.

Programmet skal også bestemme hvor mange sekunder det går etter start før Jorda og Mars er nærmest hverandre i den angitte tidsperioden. ♣ Finn ut omtrent hvilken dato dette skjer på. ♣ Hvor stor er avstanden mellom planetene da (gitt både i absoluttmål og i en avstand relativt til avstanden mellom Sola og Jorda)?

Forsøk å markere i plottene hvor de to planetene står i forhold til hverandre når de er nærmest hverandre i løpet av de nærmeste to årene.

♣ Vurdér plottet med de to banene, og avgjør omtrent hvor stor forskjell det kan være i minimumsavstanden mellom Jorda og Mars hver gang de passerer nærmest hverandre. Vil minimumsavstanden i løpet av de neste to årene være omtrent lik den aller minste avstanden som overhodet kan forekomme? Er det best vi gjør klar teleskopene for å kikke etter grønne Marsmenn nå, eller kan det hende vi bør vente til en senere anledning?

Lykke til!

Litt om hvordan obligen bør utformes

Obligen innebærer en del programmering, men fokuserer også på den underliggende matematikken og litt på fysisk forståelse. Rapporten bør ved innlevering inneholde:

- en meget kort omtale av hva som er gjort (1-2 sider totalt)
- svar på spørsmålene vi har reist (merket med ♣ i oppgaveteksten).
- plottene vi har bedt dere å lage.
- programlisting av programmene, i alle fall programmene i oppgave 3 og 4.

Det er naturlig at svar på spørsmål og plot kommer sammen med omtalen av hva som er gjort i hver enkel oppgave.

Den alternative obligen kan du levere på tilsvarende måte som andre leverer den ordinære obligen. Bruk gjerne Devilry!

HUSK at vi tilbyr *mye* hjelp i denne obligen slik at du skal kunne komme gjennom på en god måte. Det betyr at vi tilbyr hjelp både til programmering og til å finne svar på spørsmålene som er stilt.

Vedlegg for de mest interesserte: Teori bak beregningene.

Teorien vi skal benytte kan kanskje virke skremmende ved første gangs lesing, men les den et par ganger, så vil du forhåpentligvis se at den faktisk er ganske enkel. Den ser bare så omfattende ut siden vi arbeider i tre dimensjoner. Det vi gjør i hver dimensjon er imidlertid enkelt, og med å bruke "kopier" og "lim inn" og svært få endringer ut over det, blir beregningen i praksis bare ubetydelig vanskeligere enn om vi arbeidet med et én-dimensjonalt problem.

Planetbevegelser kan beskrives ved hjelp av Newtons 2. lov: $\vec{F} = m\vec{a}$. Kraften $\vec{F}$ er gitt ut fra Newtons gravitasjonslov $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$ hvor G er gravitasjonskonstanten (6.67384e-11mm^3 kg^{-1} s^{-2}), M er Solas masse (1.98855e30 kg), m er planetens masse og r er avstanden mellom solas tyngdepunkt og planetens tyngdepunkt, mens $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ er posisjonsvektor til planeten i forhold til Sola i et valgt referansesystem (Ekliptikken, J2000).

Vi ser bort fra de små påvirkningene på Solas bevegelse som skyldes gravitasjonskraften fra planetene, og for Jordas bevegelse ser vi bort fra Månens innvirkning.

Kombinerer vi Newtons 2. lov med Newtons gravitasjonslov, får vi differensialligningen:

$$-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Skriver vi ut posisjonsvektoren i kartesiske koordinater: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ og forkorter med m, får vi:

$$-\frac{GM}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Denne ligningen kan betraktes som tre tilsynelatende uavhengige ligninger. For x-retningen ($\vec{i}$) vil ligningen se slik ut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}x \tag{2}$$

og tilsvarende for y og z. Koblingen mellom ligningene finnes bare gjennom den felles parameteren r som er avstanden $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Siden Newtons 2. lov er en annen ordens differensialligning, gjør vi et triks når vi løser den numerisk. Trikset er å erstatte den andre ordens ligningen med to koblede første ordens differensialligniner. For ligning (2) blir disse to ligningene:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{GM}{r^3}x \qquad \text{og} \qquad dx/dt = v_x \tag{3}$$

Vi kan anvende standard integreringsmetoder (f.eks. Eulers metode) for å løse disse to koblede første ordens differensialligningene. Helt tilsvarende løser vi ligningene for y og z-komponentene, og da har vi hele bevegelsen! [2]

Merk at for en annen ordens differensialligning må vi kjenne til to initialbetingelser for å løse ligningen entydig. I vårt tilfelle bruker vi posisjon og hastighet ved starttidspunktet som initialbetingelser.

[2] Ved senere kurs lærer du hvordan vi kan behandle hele vektorer i en jafs slik at vi slipper å angi x-, y- og z-komponenter hver for seg slik vi gjør i denne obligen.